



# O uso das estratégias de cálculo mental por alunos do 3.º ano de escolaridade

**Relatório da Componente de Investigação de Estágio III  
do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do  
1.º Ciclo do Ensino Básico**

**Orientadora:** Professora Joana Brocardo

Carina Veloso, N.º110140024  
Novembro 2015



## Agradecimentos

Este caminho não o fiz sozinha e agradeço a todos os que me incentivaram a continuar, que fizeram com que fosse à luta e que não desistisse do meu sonho!

Começo por agradecer à minha família pelo apoio incondicional, sem vocês não seria o que sou hoje nem tinha chegado tao longe. Um obrigado muito especial aos meus pais e à minha irmã pelo apoio, pela força, amor e carinho demonstrado em todos os momentos.

Ao meu querido noivo pela paciência, pela força que me dá todos os dias para continuar a lutar e, principalmente por estar a meu lado nesta luta com um amor inmensurável.

À minha orientadora, Professora Joana Brocardo, por todo o apoio, pelo incentivo que me deu ao longo desta grande jornada.

Aos amigos que me apoiaram e que continuam a fazer a minha vida melhor.

Às crianças que se cruzaram comigo nesta grande caminhada, ao longo de diversos estágios, obrigada pelos sorrisos, pelas aprendizagens e pelas lições de vida que me ensinaram.

*“Educa-se com o sentir mais do que com a inteligência.*

*Só se educa inteligentemente se se educa pelo coração com amor.”*

João dos Santos

## Resumo

O cálculo mental, essencial ao longo da vida, deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade, através do contacto com diversas experiências. A matemática é para todos e, tal como o NCTM defende, *aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros* (NCTM, 2007, p. 5). Para que tal seja possível, o cálculo mental deve ser devidamente desenvolvido e estimulado desde cedo, permitindo um aumento da eficácia de utilização ao longo do tempo. A implementação de rotinas de cálculo mental permite aos alunos o desenvolvimento de estratégias de cálculo flexíveis entre os números, utilizando as propriedades das operações.

O estudo desenvolvido baseia-se na utilização e na evolução das estratégias usadas pelos alunos durante a exploração de tiras de cálculo mental e cadeias numéricas. Para a concretização do mesmo, foram colocadas duas questões: Quais as estratégias de cálculo mental que os alunos usam? Como evoluem as escolhas das estratégias de cálculo mental?

Este estudo foi realizado numa turma com 20 alunos com idades entre os 7 e os 8 anos de idade e seguiu uma metodologia qualitativa de investigação-ação.

Os resultados obtidos permitem afirmar que no final do estudo os alunos se mostram mais à-vontade com algumas estratégias, que parecem ter facilitado o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. Nas diferentes operações apresentadas no estudo os alunos mostraram a sua preferência por algumas estratégias específicas. No que diz respeito às operações de adição os alunos usam mais estratégias de decomposição; na subtração os alunos preferem a estratégia de saltos e, na multiplicação os alunos dividem-se em procedimentos aditivos e procedimentos multiplicativos. Em todas as operações existe sempre um grande número de alunos que apresenta apenas o resultado, não evidenciando o tipo de estratégia utilizada. Com a exploração das cadeias numéricas os alunos usaram algumas estratégias que não tinham sido aplicadas na resolução das tiras, mostrando alguma evolução no desenvolvimento do seu raciocínio, bem como na comunicação.

Palavras-chave: Cálculo Mental; Estratégias de Cálculo Mental; Cadeias Numéricas

## Abstract

Mental calculation, essential throughout life, should be developed from the early years of schooling, through contact with diverse experiences. Math is for everyone and, as the NCTM argues, those who understand and are able to do mathematics will have significantly greater opportunities and options to build their future (NCTM, 2007, p. 5). For this to be possible, mental calculation must be properly developed and nurtured from an early age, allowing an efficiency of use increase over time. The implementation of mental calculation routines allows students to develop flexible calculation strategies between the numbers, using the properties of the numerical operations.

The present study is based on the use and development of strategies used by students during the exploration of mental calculation strips and numeric strings. To achieve it, two questions were placed: What are the mental calculation strategies that students use? How does the choices of mental calculation strategies develop?

This study was conducted in a class with 20 students between the ages of 7 and 8 years old and followed a qualitative methodology of action research.

The results indicate that at the end of the study the students were more comfortable with some strategies that seem to have facilitated the development of reasoning and mathematical communication. In different operations presented in the study, the students showed their preference for some specific strategies. With regard to the operations of adding, students used more strategies of decomposition; in the subtraction, students preferred the strategy of jumps and, in multiplication, the students were divided between additive and multiplicative procedures. In all operations there were always a large number of students that only presented the result, not showing the kind of strategy used. With the operation of numeric strings, students used some strategies that had not been applied in the resolution of the strips, showing some evolution in the development of their reasoning, as well as in the communication.

Keywords: Mental Calculation; Mental Calculation strategies; Numeric Strings

## Índice

|  |      |
|--|------|
| Capítulo 1 – Introdução .....                        | 1    |
| Capítulo 2 – Revisão de literatura .....             | 3    |
| 2.1. Cálculo mental: o que é?.....                   | 3    |
| 2.2. Estratégias de cálculo mental .....             | 6    |
| 2.3. O cálculo mental na aula do 1º ciclo .....      | 11   |
| Capítulo 3 – Metodologia .....                       | 14   |
| 3.1. Opções metodológicas .....                      | 14   |
| 3.2. Contexto e participantes .....                  | 15   |
| 3.3. Recolha e análise de dados .....                | 15   |
| Capítulo 4 – Análise de dados .....                  | 18   |
| 4.1. A resolução das “tiras” de cálculo mental ..... | 18   |
| Sessão de 12 de novembro .....                       | 18   |
| Sessão de 13 de novembro .....                       | 25   |
| Sessão de 19 de novembro .....                       | 30   |
| Sessão de 20 de novembro .....                       | 39   |
| Sessão de 21 de novembro .....                       | 46   |
| Sessão de 26 de novembro .....                       | 53   |
| Sessão de 27 de novembro .....                       | 59   |
| Sessão de 28 de novembro .....                       | 67   |
| 4.2. A exploração das cadeias .....                  | 73   |
| A 1ª cadeia .....                                    | 74   |
| A 2ª cadeia .....                                    | 75   |
| A 3ª cadeia .....                                    | 76   |
| A 4ª cadeia .....                                    | 77   |
| A 5ª cadeia .....                                    | 78/I |

|  |    |
|--|----|
| Capítulo 5 – Conclusões e considerações finais ..... | 81 |
| Referências bibliográficas .....                     | 88 |

## Índice de quadros

|   |    |
|---|----|
| Quadro 1 – Formas de cálculo mental de Buys (2001) .....                      | 4  |
| Quadro 2 – Algoritmos segundo Thompson (1999) .....                           | 5  |
| Quadro 3 – Algoritmo e cálculo mental – diferenças .....                      | 6  |
| Quadro 4 – Estratégias categorizadas por Thompson (2009) .....                | 8  |
| Quadro 5 – Estratégias de adição categorizadas por Beishizen (1993) .....     | 9  |
| Quadro 6 – Estratégias de subtração categorizadas por Beishizen (1993) .....  | 9  |
| Quadro 7 – Estratégias de multiplicação categorizadas por Mendes (2012) ..... | 10 |
| Quadro 8 – Análise de dados realizada .....                                   | 16 |

## Índice de tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Tira de cálculo mental de <b>12/11/2012</b> .....            | 18 |
| Tabela 2 - Resumo das estratégias nas operações de adição.....          | 19 |
| Tabela 3 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....      | 20 |
| Tabela 4 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação .....  | 21 |
| Tabela 5 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....         | 23 |
| Tabela 6 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....      | 24 |
| Tabela 7 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação .....  | 24 |
| Tabela 8 – Tira de cálculo mental de <b>13/11/2012</b> .....            | 25 |
| Tabela 9 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....         | 25 |
| Tabela 10 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....     | 26 |
| Tabela 11 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação ..... | 28 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 12 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....        | 29 |
| Tabela 13 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....     | 30 |
| Tabela 14 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação ..... | 30 |
| Tabela 15 – Tira de cálculo mental de <b>19/11/2012</b> .....           | 31 |
| Tabela 16 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....        | 31 |
| Tabela 17 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....     | 33 |
| Tabela 18 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação ..... | 35 |
| Tabela 19 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....        | 38 |
| Tabela 20 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....     | 38 |
| Tabela 21 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação ..... | 39 |
| Tabela 22 – Tira de cálculo mental de <b>20/11/2012</b> .....           | 39 |
| Tabela 23 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....        | 40 |
| Tabela 24 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....     | 41 |
| Tabela 25 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação ..... | 43 |
| Tabela 26 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....        | 45 |
| Tabela 27 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....     | 45 |
| Tabela 28 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação ..... | 46 |
| Tabela 29 – Tira de cálculo mental de <b>21/11/2012</b> .....           | 46 |
| Tabela 30 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....        | 47 |
| Tabela 31 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....     | 48 |
| Tabela 32 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação ..... | 50 |
| Tabela 33 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....        | 51 |
| Tabela 34 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....     | 52 |
| Tabela 35 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação ..... | 52 |
| Tabela 36 – Tira de cálculo mental de <b>26/11/2012</b> .....           | 53 |
| Tabela 37 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....        | 53 |



|  |    |
|--|----|
| Tabela 38 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....      | 55 |
| Tabela 39 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação .....  | 56 |
| Tabela 40 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....         | 57 |
| Tabela 41 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....      | 58 |
| Tabela 42 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação .....  | 58 |
| Tabela 43 – Tira de cálculo mental de <b>27/11/2012</b> .....            | 59 |
| Tabela 44 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....         | 59 |
| Tabela 45 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....      | 61 |
| Tabela 46 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação .....  | 63 |
| Tabela 47 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....         | 65 |
| Tabela 48 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....      | 66 |
| Tabela 49 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação .....  | 66 |
| Tabela 50 – Tira de cálculo mental de <b>28/11/2012</b> .....            | 67 |
| Tabela 51 – Resumo das estratégias nas operações de adição .....         | 67 |
| Tabela 52 – Resumo das estratégias nas operações de subtração .....      | 69 |
| Tabela 53 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação .....  | 70 |
| Tabela 54 – Síntese de estratégias nas operações de adição .....         | 72 |
| Tabela 55 – Síntese de estratégias nas operações de subtração .....      | 73 |
| Tabela 56 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação .....  | 73 |
| Tabela 57 – Cadeias numéricas apresentadas aos alunos .....              | 74 |
| Tabela 58 – Justificações apresentadas pelos alunos na 1.ªcadeia .....   | 75 |
| Tabela 59 – Justificações apresentadas pelos alunos na 2.ªcadeia .....   | 76 |
| Tabela 60 – Justificações apresentadas pelos alunos na 3.ªcadeia .....   | 77 |
| Tabela 61 – Justificações apresentadas pelos alunos na 4.ªcadeia .....   | 78 |
| Tabela 62 – Justificações apresentadas pelos alunos na 5.ªcadeia .....   | 79 |
| Tabela 63 – Síntese global das estratégias nas operações de adição ..... | 82 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 64 – Síntese global das estratégias nas operações de subtração .....     | 82 |
| Tabela 65 – Síntese global das estratégias nas operações de multiplicação ..... | 83 |

## Índice de figuras

### Sessão de 12 de novembro

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Estratégia 1010 (aluna C) .....                                  | 19 |
| Figura 2 – Estratégia 10's (aluno B) .....                                  | 19 |
| Figura 3 – Estratégia 10's (aluna A) .....                                  | 19 |
| Figura 4 – Outra estratégia (aluno H) .....                                 | 20 |
| Figura 5 – Estratégia 1010 (aluna J) .....                                  | 20 |
| Figura 6 – Estratégia 10's (aluno O) .....                                  | 20 |
| Figura 7 – Estratégia N10 (aluna D) .....                                   | 21 |
| Figura 8 – Estratégia N10 (aluna E) .....                                   | 21 |
| Figura 9 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno R) .....  | 22 |
| Figura 10 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna F) ..... | 22 |
| Figura 11 – Procedimento aditivo – adicionar dois a dois (aluna C) .....    | 22 |
| Figura 12 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) ..... | 22 |
| Figura 13 – Algoritmo (aluna J) .....                                       | 22 |
| Figura 14 – Indicação do resultado (aluno P) .....                          | 23 |
| Figura 15 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) ..... | 23 |
| Figura 16 – Algoritmo (aluna J) .....                                       | 23 |

### Sessão de 13 de novembro

|   |    |
|---|----|
| Figura 17 – Estratégia 1010 (aluno H) ..... | 25 |
| Figura 18 – Estratégia 1010 (aluno P) ..... | 26 |
| Figura 19 – Estratégia 10's (aluno R) ..... | 26 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 20 – Estratégia 1010 (aluna J) .....   | 26 |
| Figura 21 – Estratégia N10 (aluna E) .....  | 27 |
| Figura 22 – Estratégia 1010 (aluna M) .....   | 27 |
| Figura 23 – Estratégia 1010 (aluna C) .....   | 27 |
| Figura 24 – Estratégia N10 (aluna E) .....  | 27 |
| Figura 25 – Estratégia N10 (aluna E) .....  | 27 |
| Figura 26 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna D) .....                             | 28 |
| Figura 27 – Procedimento multiplicativo – decomposição não decimal de um dos<br>fatores (aluna M) ..... | 28 |
| Figura 28 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) .....                             | 29 |
| Figura 29 – Procedimento multiplicativo – decomposição não decimal de um dos<br>fatores (aluno P) ..... | 29 |
| Figura 30 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E).....                              | 29 |

### **Sessão de 19 de novembro**

|   |    |
|---|----|
| Figura 31 – Estratégia 10's (aluna A) ..... | 31 |
| Figura 32 – Estratégia 1010 (aluna E) ..... | 32 |
| Figura 33 – Estratégia 10's (aluna M) ..... | 32 |
| Figura 34 – Estratégia 1010 (aluno O) ..... | 32 |
| Figura 35 – Estratégia 1010 (aluna N) ..... | 32 |
| Figura 36 – Estratégia 10's (aluno B) ..... | 32 |
| Figura 37 – Estratégia A10 (aluna C) .....  | 33 |
| Figura 38 – Estratégia 1010 (aluna E) ..... | 34 |
| Figura 39 – Estratégia N10 (aluno R) .....  | 34 |
| Figura 40 – Estratégia A10 (aluna A) .....  | 34 |
| Figura 41 – Estratégia N10 (aluna M) .....  | 34 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 42 – Estratégia A10 (aluno P) .....  | 35 |
| Figura 43 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                         | 36 |
| Figura 44 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluna N) ..... | 36 |
| Figura 45 – Algoritmo (aluna F) .....   | 36 |
| Figura 46 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) .....                         | 37 |
| Figura 47 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno R) .....                         | 37 |
| Figura 48 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                         | 37 |
| <b>Sessão de 20 de novembro</b>   |    |
| Figura 49 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 40 |
| Figura 50 – Estratégia 1010 (aluna A) .....   | 40 |
| Figura 51 – Estratégia 1010 (aluna E) .....   | 40 |
| Figura 52 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 40 |
| Figura 53 – Estratégia 1010 (aluna J) .....   | 41 |
| Figura 54 – Estratégia 1010 (aluna N) .....   | 41 |
| Figura 55 – Estratégia A10 (aluna A) .....  | 42 |
| Figura 56 – Estratégia N10 (aluno P) .....  | 42 |
| Figura 57 – Estratégia N10 (aluno P) .....  | 42 |
| Figura 58 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna C) .....                         | 43 |
| Figura 59 – Outra estratégia (aluna E) .....  | 44 |
| Figura 60 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                         | 44 |
| Figura 61 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluna M) ..... | 44 |
| Figura 62 – Algoritmo (aluna D) .....   | 44 |

#### **Sessão de 21 de novembro**

|   |    |
|---|----|
| Figura 63 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 47 |
| Figura 64 – Estratégia 1010 (aluno O) .....   | 47 |
| Figura 65 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 47 |
| Figura 66 – Estratégia 1010 (aluna E) .....   | 47 |
| Figura 67 – Estratégia 1010 (aluna C) .....   | 48 |
| Figura 68 – Estratégia 10's (aluna D) .....   | 48 |
| Figura 69 – Estratégia A10 (aluna A) .....  | 49 |
| Figura 70 – Estratégia N10 (aluna E) .....  | 49 |
| Figura 71 – Estratégia 1010 (aluna M) .....   | 49 |
| Figura 72 – Estratégia N10 (aluna E) .....  | 49 |
| Figura 73 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) .....                         | 50 |
| Figura 74 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) .....                         | 50 |
| Figura 75 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluna M) ..... | 51 |
| Figura 76 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluno B) ..... | 51 |
| Figura 77 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna F) .....                         | 51 |
| <b>Sessão de 26 de novembro</b>   |    |
| Figura 78 – Estratégia 1010 (aluna C) .....   | 54 |
| Figura 79 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 54 |
| Figura 80 – Estratégia 10's (aluno B) .....   | 54 |
| Figura 81 – Estratégia 1010 (aluno P) .....   | 54 |
| Figura 82 – Estratégia 1010 (aluna D) .....   | 54 |
| Figura 83 – Estratégia 10's (aluna M) .....   | 54 |
| Figura 84 – Estratégia A10 (aluna A) .....  | 55 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 85 – Estratégia A10 (aluna C) .....   | 55 |
| Figura 86 – Estratégia 1010 (aluno B) .....  | 56 |
| Figura 87 – Estratégia A10 (aluno H) .....   | 56 |
| Figura 88 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                          | 57 |
| Figura 89 – Procedimento multiplicativo – usar múltiplos de 5 e de 10 (aluna J) .....                | 57 |
| <b>Sessão de 27 de novembro</b>  |    |
| Figura 90 – Estratégia 10's (aluno B) .....  | 59 |
| Figura 91 – Estratégia 1010 (aluna E) .....  | 60 |
| Figura 92 – Estratégia 1010 (aluna J) .....  | 60 |
| Figura 93 – Estratégia 10's (aluna M) .....  | 60 |
| Figura 94 – Estratégia 1010 (aluna C) .....  | 60 |
| Figura 95 – Estratégia 10's (aluna F) .....  | 60 |
| Figura 96 – Estratégia A10 (aluna A) .....   | 61 |
| Figura 97 – Estratégia 1010 (aluna F) .....  | 61 |
| Figura 98 – Estratégia A10 (aluna C) .....   | 62 |
| Figura 99 – Estratégia 1010 (aluna E) .....  | 62 |
| Figura 100 – Estratégia A10 (aluno P) .....  | 62 |
| Figura 101 – Procedimento aditivo – adicionar dois a dois (aluna C) .....                            | 63 |
| Figura 102 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna J) .....                         | 64 |
| Figura 103 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluno O) ..... | 64 |
| Figura 104 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores<br>(aluno O) ..... | 64 |
| Figura 105 – Procedimento multiplicativo – usar múltiplos de 5 e de 10 (aluno P) .....               | 64 |
| Figura 106 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                         | 64 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 107 – Procedimento multiplicativo – decomposição não decimal de um dos fatores (aluna A) ..... | 65 |
| Figura 108 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                          | 65 |
| <b>Sessão de 28 de novembro</b>   |    |
| Figura 109 – Estratégia 10's (aluna M) .....  | 68 |
| Figura 110 – Estratégia 1010 (aluna N) .....  | 68 |
| Figura 111 – Estratégia 1010 (aluna E) .....  | 68 |
| Figura 112 – Estratégia 10's (aluna F) .....  | 68 |
| Figura 113 – Estratégia 1010 (aluna D) .....  | 68 |
| Figura 114 – Estratégia 10's (aluna F) .....  | 68 |
| Figura 115 – Estratégia A10 (aluna C) .....   | 69 |
| Figura 116 – Estratégia 1010 (aluna J) .....  | 69 |
| Figura 117 – Estratégia A10 (aluno O) .....   | 69 |
| Figura 118 – Estratégia N10C (aluno H) .....  | 70 |
| Figura 119 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno H) .....                          | 71 |
| Figura 120 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O) .....     | 71 |
| Figura 121 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                          | 71 |
| Figura 122 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluna A) .....     | 71 |
| Figura 123 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E) .....                          | 71 |
| Figura 124 – Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna F) .....                          | 72 |
| Figura 125 – Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O) .....     | 72 |

## Índice de gráficos

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 1 – Participação dos alunos na 1.ªcadeia..... | 75 |
| Gráfico 2 – Participação dos alunos na 2.ªcadeia..... | 75 |
| Gráfico 3 – Participação dos alunos na 3.ªcadeia..... | 76 |
| Gráfico 4 – Participação dos alunos na 4.ªcadeia..... | 77 |
| Gráfico 5 – Participação dos alunos na 5.ªcadeia..... | 79 |



## Capítulo 1 - Introdução

O cálculo mental deve ser desenvolvido desde a entrada para o 1º ciclo, e, segundo o PMEB - Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007)<sup>1</sup> *Existem múltiplas situações no dia-a-dia da sala de aula que permitem trabalhá-lo* (p.10).

O cálculo mental não se desenvolve apenas na escola, mas também pela vida fora, no dia-a-dia de cada indivíduo. No entanto é na escola, sobretudo nos primeiros anos de escolaridade que é fundamental desenvolver o cálculo mental. De facto, a maioria dos cálculos que fazemos na vida adulta são feitos mentalmente, este desenvolvimento deve ser estimulado desde cedo nos alunos permitindo uma maior eficácia na sua utilização ao longo dos anos.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) defende que a matemática é para todos e que todos devem ter as mesmas oportunidades de evoluir nesta área, refere ainda que *aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros* (NCTM, 2007, p. 5). É essencial que o professor estimule os alunos a procurar a matemática dentro e fora da sala de aula, ela está em tudo o que nos rodeia.

No tema Números e Operações do PMEB, é referido que o seu propósito principal de ensino é *desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito* (p.13), sendo um dos seus objetivos *desenvolver destrezas de cálculo mental e escrito* (p.13). É ainda mencionado que, para que este objetivo seja cumprido, *é necessário proporcionar aos alunos situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental, [...] e devem ser também praticadas na aula rotinas de cálculo mental, podendo este ser apoiados por registos* (p.14). A realização de rotinas de cálculo mental ajuda os alunos a desenvolver estratégias de cálculo flexíveis entre os números, utilizando as propriedades das operações.

Esta investigação foi realizada numa turma de 3.º ano de um determinado Agrupamento de Escolas composta por 20 alunos, sendo um deles um aluno com Necessidades Educativas Especiais (N.E.E.). Após observar atentamente as fragilidades da turma, pude constatar que os alunos apresentavam algumas dificuldades na área da Matemática, mais precisamente no que diz respeito à utilização de estratégias de cálculo mental. Ao deparar-me com este problema, e, após algumas conversas com a professora cooperante, consultei alguns documentos oficiais, nomeadamente o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) e a Brochura Números e Operações do 3.º ano, de modo a poder ajudar os alunos da melhor

---

<sup>1</sup> Programa em vigor aquando da realização do estágio

maneira possível. Como tal, de modo a desenvolver o sentido de número, decidi realizar rotinas de cálculo mental diariamente com os alunos.

Por forma a colmatar essa dificuldade nos alunos coloquei as seguintes questões problema:

**Quais as estratégias de cálculo mental que os alunos usam?**

**Como evoluem as escolhas das estratégias de cálculo mental?**

Ao longo deste trabalho estas questões serão respondidas, tendo em conta a investigação-ação realizada com os alunos do 3.º ano de escolaridade.

O presente trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo é referente a uma breve introdução onde são referidas as finalidades e as motivações que me levaram à escolha do tema e, a enunciação das questões problema. O segundo capítulo diz respeito à revisão de literatura que comporta três assuntos que se interligam entre si neste tema tão abrangente que é o cálculo mental, sendo eles, o que é o cálculo mental, as suas estratégias e o que comporta numa aula de 1ºciclo. O terceiro capítulo é alusivo à metodologia utilizada onde é explicitado o tipo de estudo utilizado e os procedimentos adotados para a realização deste estudo. No quarto capítulo é apresentada a análise de dados onde é apresentada a análise feita a cada uma das sessões de cálculo mental efetuada ao longo das semanas, apresentando resultados gerais no final de cada sessão elucidando-nos da evolução dos alunos. O quinto capítulo refere-se às considerações finais onde será apresentada uma reflexão final de todo o trabalho, reflexão essa que incidirá sobre as dificuldades encontradas ao longo do estudo e as possíveis soluções para colmatar essas dificuldades. No final são apresentadas as referências bibliográficas que foram usadas neste estudo.

## CAPÍTULO 2 – Revisão de literatura

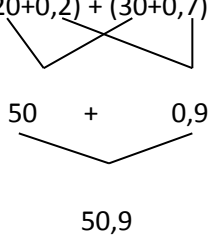
### 2.1. Cálculo mental: o que é?

*A importância do cálculo mental é uma constante nos currículos de Matemática [...], contudo o entendimento do que é cálculo mental nem sempre é único. Quando se calcula mentalmente pode-se escrever? Ou os cálculos têm de ser feitos de cabeça? Quando se usa um algoritmo “na cabeça” podemos dizer que se trata de cálculo mental?* (Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008, p.106).

A importância de dominar o cálculo é reconhecida deste há muitos anos. Um dos aspetos interessantes da história da Matemática foi a democratização do cálculo na Idade Média, fazendo com que cada vez mais pessoas o utilizassem para organização de registo escrito, tornando-se um tema de aprendizagem básica nas escolas, tão importante como ler e escrever.

O cálculo mental, entendido por alguns como um cálculo realizado de cabeça, é hoje visto como um tipo de cálculo feito “com” a cabeça. Brocardo, Serrazina e Rocha (2008, p.106) citando Noteboom, Boklove e Nelissen (2001), referem que *o cálculo mental é um cálculo pensado (não mecânico) sobre as representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números ou das operações e das suas relações entre os números e as operações. Não é calcular na cabeça mas sim calcular com a cabeça e fazer alguns registos escritos, se necessário, dependendo do grau de dificuldade e/ou da destreza que cada indivíduo.*

Buys (2001) salienta que no cálculo mental se *opera sobre os números e não sobre os dígitos; usam-se relações numéricas e propriedades das operações; embora se calcule ‘de cabeça’, é possível recorrer a registos em papel* (citado por Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008, p.106). O mesmo autor apresenta três formas de cálculo mental: o cálculo em linha, o cálculo recorrendo à decomposição decimal e o cálculo mental usando estratégias variadas. O primeiro é como se os números se encontrassem numa linha e os cálculos são feitos partindo dessa linha; o segundo preconiza a decomposição dos números; e, por fim, o terceiro implica a utilização de diferentes estratégias, ou seja, diferentes formas de resolução dos problemas.

|  |  |
|--|--|
| Cálculo em linha                           | <b><math>126 + 34 =</math></b><br>$126 + 10 = 136$<br>$136 + 10 = 146$<br>$146 + 10 = 156$<br>$156 + 5 = 161$<br>$161 - 1 = 160$                                     |
| Cálculo recorrendo à decomposição decimal  | <b><math>20,2 + 32,7 = (20+0,2) + (30+0,7) =</math></b><br><br>$50 + 0,9$<br>$50,9$ |
| Cálculo mental usando estratégias variadas | <b><math>56 + 35 =</math></b><br>$56 + 30 = 86$<br>$86 + 5 = 91$ (estratégia aditiva N10)  |

Quadro 1 – Formas de cálculo mental de Buys (2001)

As características referidas por Buys anteriormente estão também referidas no PMEB (2007), acrescentando ainda que uma das características do cálculo mental é *implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares* (p.10).

Clarificar a diferença entre algoritmo e cálculo mental ajuda a precisar o entendimento que vários autores atribuem a de cada uma destas designações e que é o que se adota neste trabalho. Qual será então a diferença entre o cálculo mental e o algoritmo? A grande diferença entre eles é que no algoritmo *trabalha-se da direita para a esquerda operando sobre os dígitos* (Brocardo, Serrazina e Rocha, 2008, p.103).

Um algoritmo é, segundo o que é referido nos dicionários, *substantivo masculino, processo de cálculo* (in Priberam); *nome masculino, MATEMÁTICA conjunto de regras bem definidas para resolver um problema (usualmente com número finito de passos); INFORMÁTICA conjunto de regras e operações que permitem resolver, num número finito de etapas, um problema; programa que se introduz numa máquina de calcular; conjunto de fases de pormenor por que é preciso passar para chegar à solução de um problema* (Do latim medieval *algorithmu-*, «algoritmo», pelo inglês *algorithm*, «idem») (in Infopédia). Segundo o Dicionário Universal da Língua Portuguesa – Escolar, um algoritmo é *processo de cálculo em que um certo número de regras formais resolvem, na generalidade e sem exceções, problemas da mesma natureza* (p.30, 1996)

Como referem Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) embora a definição anterior reúna algum consenso há autores que indicam caracterizações diferentes, como é o caso de Thompson (1999) que considera uma definição mais ampla com três categorias de algoritmos escritos: standart e formal, não standart e formal e não standart e informal.

O quadro seguinte, adaptado de Brocardo, Serrazina e Rocha (2008, p.104), evidencia que para Thompson *a maior parte dos processos de cálculo mental são considerados algoritmos*.

| Algoritmos segundo Thompson (1999) |  | Estratégia de cálculo mental e ideias matemáticas associadas   |
|------------------------------------|--|--|
| Standart e formal                  | <b>54 – 23</b><br>$54 - 20 = 34$<br>$34 - 3 = 31$<br>$54 - 23 = 31$  | <i>Cálculo em linha começando pelas dezenas e depois pelas unidades</i>                                |
| Não standart e formal              | <b>136 – 27</b><br>$\begin{array}{r} 27 \quad 3 \\ 30 \quad 100 \\ 130 \quad \underline{+ 6} \\ 136 \quad 109 \end{array}$ | <i>Para subtrair posso adicionar. Cálculo em linha, começando por aproximar à dezena mais próxima.</i> |
| Não standart e informal            | <b>123 X 4</b><br>$100 \times 4 = 400$<br>$20 \times 4 = 80$<br>$3 \times 4 = 12$<br>$400 + 80 + 12 = 492$                 | <i>Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.</i>                                  |

Adaptado de Brocardo, Serrazina e Rocha (2008, p.104)

Quadro 2 – Algoritmos segundo Thompson (1999)

Note-se que Thompson parece ligar o conceito de algoritmo ao uso de procedimentos do mesmo tipo e à ordem em que são usados. Não tem em conta os ‘objetos’ sobre os quais incide o procedimento – se são ou não dígitos-, o modo como se registam os procedimentos – verticalmente ou não- nem a ordem pela qual se efetuam os registos – da esquerda para a direita ou vice-versa. Não tem pois em conta um aspeto fundamental que é o de incluir na definição de algoritmo o nível mais abstrato de conhecimento da estrutura decimal, que não lida com o número como um todo mas sim com o número decomposto em unidades, dezenas, centenas, .... Por isso, neste trabalho segue-se o conceito de algoritmo Buys (2001), referido anteriormente e considera-se que a ele está associado uma disposição vertical com registos realizados da esquerda para a direita. No quadro seguinte procuro esclarecer este entendimento, usando diferentes formas de determinar a soma de 27 com 36.

|  |   |
|--|---|
| $\begin{array}{r} 27 \\ +36 \\ \hline 50 \\ 13 \\ \hline 63 \end{array}$   | Não é algoritmo: pois não se opera sobre os dígitos, não se escreve da esquerda para a direita.                               |
| $27+36=50+13=63$   | Não é algoritmo: pois não se opera sobre os dígitos, não se escreve da esquerda para a direita, não é uma disposição vertical |
| $\begin{array}{l} 27+10=37 \\ 37+10=47 \\ 47+10=57 \\ 57+6=63 \end{array}$ | Não é algoritmo: pois não se opera sobre os dígitos, não se escreve da esquerda para a direita.                               |
| $\begin{array}{l} 27+3=30 \\ 30+30=60 \\ 60+3=63 \end{array}$              | Não é algoritmo: pois não se opera sobre os dígitos, não se escreve da esquerda para a direita.                               |
| $\begin{array}{r} 27 \\ +36 \\ \hline 63 \end{array}$                      | É algoritmo: opera-se sobre os dígitos, é uma disposição vertical.  |

Quadro 3 – Algoritmo e cálculo mental – diferenças

## 2.2. Estratégias de cálculo mental

Será que as estratégias devem ser ensinadas aos alunos? Ou devem ser eles a descobri-las? *As estratégias inventadas, que vão sendo aperfeiçoadas à medida que os alunos têm uma compreensão mais profunda sobre os números, as operações e as relações numéricas são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo mental.* (Heirdsfield et al, 1999 citado por Mendes, 2012, p.122).

Thompson (1999) refere que as estratégias de cálculo mental *são aplicações de factos numéricos conhecidos ou rapidamente calculados em combinação com propriedades específicas do sistema numérico para encontrar a solução para um cálculo cuja resposta não é conhecida* (citado por Mendes, 2012, p.102), apresentando assim uma descrição bastante abrangente que não distingue o cálculo mental dos outros tipos de cálculo.

Para Hartnett (2007), referido por Mendes (2012), as estratégias de cálculo mental necessitam que exista algo mais do que apenas uma memorização de um conjunto de procedimentos, diferenciando este tipo de cálculo dos algoritmos.

Mendes (2012, p.119), seguindo as ideias de Threlfall (2002), *considera que uma estratégia de cálculo mental a usar num determinado problema não é selecionada de entre*

*outras mas 'emerge' perante aquele contexto particular, apesar de ser influenciada, naturalmente, por experiências anteriores do aluno.* Logo, não podemos afirmar que existe uma estratégia certa para cada contexto, visto que o que um aluno acha que é correto o outro pode encontrar outra forma de resolver divergente da do colega, contudo ambas certas.

As estratégias utilizadas pelos alunos podem ser diversificadas, usando apenas estratégias ensinadas na sala de aula pelo professor ou aplicando também estratégias inventadas pelos próprios alunos. Deste modo, os alunos devem ser encorajados na partilha das suas estratégias, evoluindo assim na comunicação matemática e no seu próprio raciocínio, aprendendo uns com os outros, aumentando o seu leque de estratégias.

O trabalho na sala de aula é determinante no desenvolvimento das estratégias, o professor terá de planear as tarefas de modo a levar os alunos a utilizarem estratégias conhecidas e as desenvolverem consoante o grau de dificuldade. O cálculo mental deve ser sistemático e intencional, proporcionando aos alunos o contacto com diversos tipos de exercícios e graus de dificuldade. O professor deverá propor desafios que cativem os alunos e lhes despolete o interesse estimulando o cálculo mental e, consequentemente, desenvolvendo o sentido de número.

Existem diferentes tipos de estratégias adotadas pelos alunos, umas para cálculos com números menores que 20 e outras para cálculos com números entre 20 e 100. Autores como Thompson (2009), referido por Ferreira (2012), apresentam algumas estratégias de cálculo mental para operações de subtração e adição com números menores que 20.

O quadro abaixo sintetiza as estratégias categorizadas por Thompson (2009) referidas por Moraes (2011).

|   |             |   |
|---|-------------|---|
| ESTRATÉGIAS PARA NÚMEROS MENORES QUE 20 | ADITIVAS    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Contar todos:</b> os alunos recorrem a materiais (ou aos dedos) para realizar a adição, contando tudo (<math>4 + 5</math>, o aluno conta do 1 até ao 9).</li> <li>▪ <b>Contar a partir do primeiro número:</b> o aluno conta a partir do primeiro número, continuando a contar a partir desse (<math>4 + 5</math>, o aluno conta: quatro, cinco, seis, sete, oito, nove).</li> <li>▪ <b>Contar a partir do número maior:</b> o aluno conta a partir do número maior (<math>4 + 5</math>, o aluno conta: cinco, seis, sete, oito, nove), chegando mais rapidamente ao resultado.</li> <li>▪ <b>Utilizar factos numéricos da adição:</b> o aluno responde rapidamente, uma vez que a operação apresentada já é do seu domínio.</li> <li>▪ <b>Calcular com base em factos numéricos:</b> o aluno recorre a outras operações para calcular o valor da que é apresentada (<math>4 + 5</math>, o aluno calcula <math>5 + 5 = 10</math>, logo <math>4 + 5</math> é menos um valor, logo 9).</li> </ul> |
|   | SUBTRATIVAS | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Contar os que sobram (count out):</b> o aluno levanta os dedos todos (aditivo) e baixa os que precisa de subtrair (subtrativo), contando os restantes (resto).</li> <li>▪ <b>Contar para trás a partir de um número (count back from):</b> o aluno conta para trás, partindo do aditivo até chegar ao subtrativo, usando os dedos ou outro material como auxílio. O resultado da operação é o último número que diz.</li> <li>▪ <b>Contar para trás até (count back to):</b> o aluno conta para trás, partindo do aditivo até chegar ao subtrativo, usando os dedos como auxílio. O resultado é o número de dedos que tem levantado.</li> <li>▪ <b>Contar até (count up):</b> o aluno conta a partir do número mais baixo (subtrativo) até ao número mais alto (aditivo), com o auxílio dos dedos.</li> <li>▪ <b>Calcular com base em factos numéricos:</b> o aluno recorre a factos que já são do seu domínio para resolver a operação proposta.</li> </ul>                                    |

Quadro 4 - Estratégias categorizadas por Thompson (2009)

Beishuizen (1993), referido por Ferreira (2012), categorizou estratégias com números entre 20 e 100. As estratégias apresentadas pelo autor dividem-se em duas categorias, as de saltos ou lineares e as de decomposição.

O quadro seguinte mostra a forma como Beishuizen (1993) categorizou as estratégias no que diz respeito à adição, separadas em duas grandes estratégias, a N10 e a 1010.



| Estratégias  |      |      | Adição<br>$47 + 29 = 76$                         |
|--------------|------|------|--|
| Saltos       | N10  | N10  | $47 + 20 = 67$<br>$67 + 9 = 76$                  |
|              |      | N10C | $47 + 30 = 77$<br>$77 - 1 = 76$                  |
|              |      | A10  | $47 + 3 = 50$<br>$50 + 26 = 76$                  |
| Decomposição | 1010 | 1010 | $40 + 20 = 60$<br>$7 + 9 = 16$<br>$60 + 16 = 76$ |
|              |      | 10's | $40 + 20 = 60$<br>$60 + 7 = 67$<br>$67 + 9 = 76$ |

Quadro 5 – Estratégias de adição categorizadas por Beishuizen (1993)

Beishuizen (1993) categorizou também estratégias para a subtração, baseando-se nas mesmas categorias, saltos e decomposição. No seguinte quadro sintetizo a forma como este autor categorizou as estratégias respeitantes à subtração.

| Estratégias  |      |      | Subtração<br>$54 - 38 = 16$                      |
|--------------|------|------|--|
| Saltos       | N10  | N10  | $54 - 30 = 24$<br>$24 - 8 = 16$                  |
|              |      | N10C | $54 - 40 = 14$<br>$14 + 2 = 16$                  |
|              |      | A10  | $54 - 4 = 50$<br>$50 - 34 = 16$                  |
| Decomposição | 1010 | 1010 | $50 - 30 = 20$<br>$4 - 8 = -4$<br>$20 - 4 = 16$  |
|              |      | 10's | $50 - 30 = 20$<br>$20 + 4 = 24$<br>$24 - 8 = 16$ |

Quadro 6 – Estratégias de subtração categorizadas por Beishuizen (1993)

Segundo os estudos realizados por Mendes (2012), Ferreira (2012) e Oliveira (2013) os alunos mostram a sua proficiência no cálculo ao utilizarem estratégias mistas, combinando N10/A10 e 10's/A10. No que se refere à adição e subtração foram utilizadas diferentes tipos de estratégias, desde as mais simples às mais complexas. Alguns alunos utilizaram estratégias simples, tanto na adição como na subtração, entre elas adicionar ou subtrair sucessivamente,

adicionar de dois em dois, ou até mesmo a realização de contagens por saltos e decomposições.

As estratégias menos usadas entre os alunos foram a 10's, usada apenas nas adições, e a A10. A estratégia N10 foi considerada a mais eficaz, existindo uma percentagem de erro mínima nos cálculos efetuados.

Segundo um estudo feito por Mendes (2012), existem alguns procedimentos que permitem categorizar estratégias usadas pelos alunos nas operações referentes à multiplicação. Mendes (2012), após análise de um estudo feito por si, categorizou quatro procedimentos usados pelos alunos e os respetivos procedimentos específicos que os complementam. O quadro seguinte sintetiza a formas como a autora categorizou as estratégias referentes à multiplicação.

| <b>Categorias de procedimentos</b> | <b>Procedimentos específicos</b>                                |
|------------------------------------|---|
| Procedimentos de contagem          | Contar por saltos   |
| Procedimentos aditivos             | Adicionar sucessivamente  |
|                                    | Adicionar dois a dois   |
|                                    | Adicionar em coluna   |
| Procedimentos subtrativos          | Subtrair sucessivamente   |
| Procedimentos multiplicativos      | Usar produtos conhecidos  |
|                                    | Usar relações de dobro  |
|                                    | Usar múltiplos de 5 e de 10                                     |
|                                    | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores             |
|                                    | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores                 |
|                                    | Ajustar e compensar   |
|                                    | Usar relações de dobro e de metade                              |
|                                    | Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência |
|                                    | Multiplicar em coluna   |

Quadro 7 – Estratégias de multiplicação categorizadas por Mendes (2012)

À medida que os alunos se vão aperfeiçoando na utilização de diferentes tipos de estratégias, estes vão aumentando a sua proficiência no cálculo mental. Vão evoluindo de estratégia em estratégia, tornando-as suas, adaptando as estratégias que aprenderam tornando-as mais simples e de fácil utilização pessoal. Através da utilização de diferentes estratégias, os alunos desenvolvem o sentido de número, aumentando assim o seu conhecimento pelas operações envolvidas, a relação entre si e com os próprios números.

Considera-se então fundamental a discussão das estratégias na sala de aula, por forma a desenvolver nos alunos espírito crítico na resolução das tarefas/operações apresentadas, desenvolvendo a comunicação matemática, desenvolvendo assim o sentido de número.

### 2.3. O cálculo mental na aula do 1º ciclo

*Os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores proporcionam* (NCTM, 2007, p.17). Através da experiência com que se deparam na escola, os alunos aprendem ou não a gostar da matemática, desenvolvendo as suas capacidades no domínio desta área. Serão as situações proporcionadas na sala de aula desafiantes o suficiente para despoletar este gosto? Estarão os alunos preparados para inventar novas estratégias e desenvolvê-las?

O sucesso do cálculo mental na aprendizagem depende, não só, do papel do professor na sala de aula como da vontade e motivação do aluno. Tal como é referido no NCTM (2007, p.34) *Tanto investigadores como professores experientes descobriram que, quando os alunos dos primeiros anos de escolaridade são encorajados a desenvolver, registar, explicar e criticar as estratégias de resolução de problemas de cálculo dos seus colegas, podem ocorrer vários tipos de aprendizagens importantes.* É ainda referido na mesma obra que *A competência matemática abre as portas a futuros produtivos; a sua ausência mantém-nas fechadas* (p.5), devem então os professores promover essa competência para que as crianças possam ter futuros brilhantes.

Altet (1997) salienta que *a função do professor já não é apenas de transmitir conhecimentos, mas agir de modo a que os alunos aprendam, de colocar o aluno «em actividade».* *Torna-se um intermediário entre o saber e o aluno, levando em consideração os processos de aprendizagem, torna-se um mediador entre o aluno e o saber, facilitando a elaboração do sentido das aprendizagens, envolvendo o aluno num processo de construção de sentido.* (p.53)

Tal como é referido no PMEB (2007) *o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas* (p.9), promovendo assim o desenvolvimento da sua destreza e comunicação entre pares, essenciais para o seu desenvolvimento. Deste modo, cria-se entre o aluno e o professor uma empatia, desenvolvendo nos alunos o à-vontade para discutir estratégias e pontos de vista entre os colegas.

A comunicação é um dos pontos importantes nesta área curricular, como em todas as outras, presente nas orientações curriculares. Os alunos devem comunicar a sua forma de pensar, as suas estratégias e as suas dúvidas. Através da comunicação os alunos desenvolvem capacidades que sozinhos não conseguiriam, a destreza de cálculo é uma delas, através da partilha os alunos conseguem desenvolvê-la por forma a fortalecer a resolução dos cálculos de forma eficaz e precisa. *A comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação*

*matemática. É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática. Através da comunicação as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção.* (NCTM, 2007, p.66)

O papel do professor é proporcionar aos alunos situações que ajudem a desenvolver a comunicação que, conseqüentemente, ajudará a desenvolver raciocínios, tornando-os mais rápidos e eficazes no trabalho realizado na sala de aula. Como tal, é da responsabilidade do professor criar situações na sala de aula que promovam esse desenvolvimento, aumentando a fluência do cálculo nos alunos.

O NCTM (2007) refere que deve existir uma harmonia entre a fluência de cálculo e a compreensão dos conceitos por parte dos alunos. A fluência de cálculo dos alunos prende-se com o facto de os alunos utilizarem métodos precisos e eficazes nos cálculos, para tal, estes devem desenvolver três características: a flexibilidade, a precisão e a eficácia. Os alunos necessitam de possuir um conhecimento mais alargado das várias operações numéricas e as diferentes formas de as utilizar, bem como qual a melhor estratégia que deve ser aplicada em cada caso, facilitando assim a resolução do problema colocado.

*É através da discussão na turma dos vários tipos de estratégias desenvolvidas pelos alunos ajuda-os a construir um reportório de estratégias com os seus próprios limites e flexibilidade e ensina-os, também, a decidir quais são os registos mais apropriados e proveitosos.* (PMEB, 2007, p.11).

As cadeias numéricas são também uma ótima opção para desenvolver o cálculo mental e o sentido do número, estas devem ser aplicadas de forma sistemática e intencional no início de cada aula. Uma forma de desenvolver o cálculo mental, sugerida por Fosnot e Dolk (2001) referida por Lourenço e Veia (2011, p.37), surge *a exploração de tarefas que permitam desenvolver um reportório de estratégias de cálculo baseadas numa compreensão profunda das relações numéricas e das operações.*

A cadeia deve então ser trabalhada promovendo o desenvolvimento das diferentes operações, bem como das relações entre elas e os próprios números. Durante a aula não devem ser feitas mais de duas cadeias, sendo o grau de exigência elevado ao longo das sessões. Aquando da realização das cadeias, os alunos deverão estar concentrados na tarefa. Estes não devem fazer registos no seu caderno, ficando assim focados exclusivamente na tarefa. Deste modo, existe *a necessidade de criar um ambiente de sala de aula propício à comunicação e argumentação, para que a tarefa se torne desafiante e significativa, contribuindo, desta forma, para uma maior motivação por parte dos alunos.* (Lourenço e Veia, 2011, p.40)

O professor vai apresentando a cadeia gradualmente. Apresenta a primeira proposta de cálculo e aguarda que a maioria dos alunos levante o braço, mostrando que já sabe a resposta. Em seguida, questiona um aluno sobre a resposta e a forma como resolveu a proposta. A próxima proposta está diretamente relacionada com a primeira, fazendo com que os alunos desenvolvam respostas rápidas e eficazes tendo por base os cálculos anteriores. Nos restantes cálculos, pretende-se que os alunos os associem aos anteriores, desenvolvendo o cálculo mental.

À medida que o professor vai apresentando, diariamente, novas cadeias com uma complexidade mais elevada, vai deste modo auxiliar os alunos a consolidar as diferentes operações numéricas, indispensáveis para o dia-a-dia.

## CAPÍTULO 3 – Metodologia

### 3.1. Opções metodológicas

O objetivo deste estudo é identificar as estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos assim como o modo como evoluem nesta utilização. Deste modo, a metodologia qualitativa de investigação-ação é a que mais se adequa na implementação deste projeto.

A utilização deste tipo de metodologia pressupõe a análise de um problema sentido no grupo turma, seguido do planeamento de uma solução para a resolução do mesmo, a colocação em prática da solução, a avaliação dos resultados e, por fim, a modificação da prática pedagógica tendo em conta os resultados.

Este tipo de metodologia permite uma reflexão sobre a ação, ou seja, reflete-se sobre um problema da turma, encontra-se uma suposta solução, e, por fim, reflete-se novamente sobre os resultados obtidos. Caso seja necessário uma nova reflexão sobre a ação, esta poderá ser repetida as vezes que forem necessárias, até se encontrar a solução ideal para o problema inicial, existindo assim uma preocupação sobre um trabalho eficaz que auxilie os alunos a superar as suas dificuldades. Pretende-se que exista uma perseverança tanto por parte do professor como por parte dos alunos, confrontando os resultados e propondo novas soluções.

Tal como refere Afonso (2005, p.75), *os objectivos dos estudos de investigação-acção centram-se, habitualmente, na melhoria da eficácia do grupo.*

Segundo o mesmo autor, existem cinco características que definem a investigação-ação, sendo elas:

- a) *É uma investigação realizada por pessoas directamente envolvidas na situação social que é objecto de pesquisa*
- b) *O ponto de partida da pesquisa é constituído por questões práticas do quotidiano*
- c) *Implica um respeito e adequação aos valores e às condições de trabalho na organização*
- d) *Existe um grande eclectismo metodológico no que respeita às técnicas de recolha e tratamento de dados, pois o que é relevante é que sejam compatíveis com os resultados disponíveis, e que não perturbem as práticas da organização*
- e) *A investigação-acção implica perseverança num esforço contínuo para ligar, relacionar e confrontar acção e reflexão.*

(In Natércio Afonso, *Investigação Naturalista em Educação*, p.75)

Para a realização deste projeto pretende-se que os alunos desenvolvam não só o sentido de número, como também que desenvolvam o raciocínio e a comunicação matemática, fundamental neste desenvolvimento pretendido. E, tal como é referido no PMEB,

*o desenvolvimento do raciocínio é promovido suscitando a explicação de ideias e processos, a justificação de resultados e a formulação e teste de conjecturas simples por parte dos alunos; refere ainda que, a comunicação desenvolve-se através da vivência de situações variadas envolvendo a interpretação de enunciados, a representação e expressão de ideias matemáticas, oralmente e por escrito, e a sua discussão na turma (p.29).*

### **3.2. Contexto e participantes**

Este projeto, inserido na Unidade Curricular Estágio III, teve a duração de dez semanas, tendo sido desenvolvido numa turma de terceiro ano de um determinado Agrupamento de Escolas, durante o primeiro período do ano letivo 2012/2013. Por uma questão de ética o nome dos alunos foi substituído por letras.

A turma, composta por vinte alunos, nove do sexo masculino e onze do sexo feminino. A prestação de um aluno, do sexo masculino, não consta na implementação do projeto por o mesmo estar sinalizado com NEE.

Na globalidade, o grupo apresenta-se muito heterogéneo, na medida em que, existem alunos com diferentes características quanto ao seu desenvolvimento escolar, pessoal e comportamental. O conhecimento destas características auxiliam na forma como devo agir perante o grupo, ajudando-me a ajudá-los a ultrapassar obstáculos que os condicionem na aquisição de aprendizagens.

No início deste estudo, a turma foi observada durante uma semana por forma a ser observada a sua forma de trabalhar, as suas dificuldades, o seu potencial, entre outros aspetos. Um aspeto que me chamou à atenção durante essa semana foi a relação que os alunos tinham com a Matemática, mais precisamente com o cálculo. Este era lento e com pouca flexibilidade, realizado com algumas dificuldades. O grupo era um pouco inseguro, solicitavam muitas vezes ajuda nas tarefas por mais simples que fossem.

### **3.3. Recolha e análise de dados**

Após observar a turma, foram planeadas as estratégias para ultrapassar os problemas identificados. Foram detetadas algumas dificuldades na resolução de operações matemáticas que envolvessem o cálculo mental, pois os alunos recorriam frequentemente ao algoritmo, fosse uma operação simples ou mais complexa.

A recolha de dados foi realizada em três fases. Numa fase inicial (primeira semana) foram apresentadas aos alunos tiras de cálculo com 10 operações (3 adições, 3 subtrações e 4 multiplicações) solicitando-lhes apenas que as resolvessem da maneira que considerassem mais eficaz, não havendo a indicação de formas possíveis de resolução. Numa segunda fase,

foram apresentadas tiras semelhantes, mas em que eram corrigidas algumas questões, ajudando os alunos a compreender onde erravam, possibilitando uma melhoria em futuras tiras apresentadas. Por fim, foram exploradas cadeias numéricas em grande grupo, possibilitando aos alunos a explicitação das estratégias desenvolvidas anteriormente com as tiras de cálculo.

Ao longo da implementação do projeto, realizei uma análise de dados através da análise de conteúdos e análise quantitativa. Desta forma, foram analisadas as produções dos alunos individualmente. Após esta análise, foi feita uma análise aos resultados gerais da turma em cada questão, obtendo assim dados quantitativamente. Ao longo da análise dos dados foram feitas tabelas síntese, apresentadas no capítulo seguinte, dos dados recolhidos em cada sessão, permitindo identificar a evolução de uma sessão para a outra, sendo possível a reflexão sobre os resultados ao longo das sessões apresentadas.

O quadro abaixo sistematiza a forma como os dados foram analisados:

|                  |                      |   |
|------------------|----------------------|---|
| Análise de dados | Análise de conteúdos | Análise individual da tira de cada aluno          |
|                  | Análise quantitativa | Análise dos resultados de cada dia do grupo turma |

Quadro 8 – Análise de dados realizada

No decorrer das sessões em que usei as tiras de cálculo mental percebi que os alunos tendiam a não optar por algumas estratégias. Para que tal fosse superado, ao longo das sessões procedi à correção de algumas operações em grande grupo, apresentando algumas estratégias possíveis, elucidando-os da diversidade de formas possíveis de resolução, apresentando-lhes as ‘mais’ adequadas para resolver determinada situação que lhes era proposta. Como tal foi pouco desenvolvido pelos alunos durante as tiras de cálculo mental, trabalhei cinco cadeias numéricas em cinco dias diferentes, procurando que os alunos se familiarizassem com o uso de várias estratégias de cálculo mental e aumentassem o seu ‘cardápio de escolha’ para poderem pensar cada situação não de uma forma mecânica, mas sim de uma forma pensada, avaliando qual a estratégia mais adequada para resolver cada situação proposta.

Para a implementação das cadeias numéricas contei com o auxílio da colega de estágio que, enquanto eu trabalhava as cadeias com os alunos, registava quais os alunos que participavam e posteriormente a explicação dada para cada linha da cadeia. A cadeia era apresentada gradualmente, permitindo que os alunos estabelecessem relações entre as diferentes linhas.



Ao longo de todas as fases foi realizado com os alunos, no início de cada dia, um jogo denominado “Número do dia”. Este jogo consiste em solicitar aos alunos operações matemáticas em que o seu resultado seja o número do dia do mês em que estávamos, ou seja, no dia 21 o resultado de todas as operações terá de ser 21.

## CAPÍTULO 4 – Análise de dados

Nesta análise serão apenas apresentadas as estratégias que foram utilizadas pelos alunos durante as sessões, esta análise baseia-se nas estratégias contempladas e explicitadas na revisão de literatura. Como tal, a análise elaborada às questões referentes à adição e à subtração baseou-se na categorização feita por Beishuizen (1993). No que diz respeito às estratégias implementadas na multiplicação, a análise elaborada baseia-se nas categorias de procedimentos referidos no estudo feito por Mendes (2012).

### 4.1. A resolução das “tiras” de cálculo mental

#### SESSÃO DE 12 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a tira de cálculo mental seguinte que os alunos resolveram em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 18 alunos.

|                   |
|-------------------|
| $27 + 13 =$       |
| $49 + 40 + 11 =$  |
| $125 + 175 =$     |
| $37 - 5 - 2 =$    |
| $152 - 98 =$      |
| $1245 - 99 =$     |
| $25 \times 2 =$   |
| $25 \times 20 =$  |
| $1024 \times 2 =$ |
| $40 \times 4 =$   |

Tabela 1 – Tira de cálculo mental de 12/11/2012

#### ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões de **adição**, os alunos usaram essencialmente estratégias de decomposição, maioritariamente a estratégia 10's em comparação com a estratégia 1010.

|                            |              |      | 27+13= | 49+40+11= | 125+175= |
|----------------------------|--------------|------|--------|-----------|----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 3      | 1         | 3        |
|                            | 1010         | 10's | 10     | 8         | 6        |
|                            | Algoritmo    |      | 2      | 2         | 1        |
| Outra (O)                  |              |      | 1      | 1         | -        |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 2      | 6         | 8        |

Tabela 2 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para calcular **27+13**, a aluna C apresenta uma resolução utilizando a estratégia 1010 mas sem registrar por escrito a soma de 7 com 3, passando logo a adicionar as dezenas com as unidades. O registo escrito revela que C ainda interpreta o sinal de igual como separador entre o procedimento e o resultado, não o usando ainda como igualdade entre duas quantidades. Por isso, não critica a igualdade que regista em que  $20+10$  é igual a 40.

|               |                  |
|---------------|------------------|
| <b>27+13=</b> | $20+10=30+10=40$ |
|---------------|------------------|

Figura 1 - Estratégia 1010 (aluna C)

O aluno B utilizou também a decomposição, optando pela estratégia 10's, decompondo as parcelas em dezenas e unidades.

|               |                |
|---------------|----------------|
| <b>27+13=</b> | $20+10+7+3=40$ |
|---------------|----------------|

Figura 2 - Estratégia 10's (aluno B)

Para calcular **49+40+11** os alunos também optaram por usar estratégias de decomposição. A aluna A aplicou a estratégia 10's e o aluno H resolveu a operação utilizando outra estratégia. A aluna A decompôs os fatores separando as dezenas das unidades, facilitando assim o seu cálculo; em contrapartida, o aluno H realizou mentalmente as adições  $40+40$  e  $9+1$ , pensando em 11 como  $10+1$ , apresentando logo  $80+10+10$ .

|                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| <b>49 + 40 + 11 =</b> | $40+40+10+9+1=100$ |
|-----------------------|--------------------|

Figura 3 - Estratégia 10's (aluna A)

|                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| $49 + 40 + 11 = 100$ | $80 + 10 + 10 = 100$ |
|----------------------|----------------------|

Figura 4 - Outra estratégia (aluno H)

Na terceira adição (**125+175**), os alunos continuaram a optar pela decomposição para a sua resolução. Os alunos apresentaram diferentes resoluções para esta adição, desenvolvendo as suas estratégias de forma pessoal em alguns casos. No caso da aluna J, esta apresenta-nos um raciocínio organizado, utilizando a estratégia 1010.

|                   |   |
|-------------------|---|
| $125 + 175 = 300$ | $100 + 100 = 200$<br>$20 + 70 = 90$<br>$5 + 5 = 10$ |
|-------------------|---|

Figura 5 - Estratégia 1010 (aluna J)

O aluno O utilizou a decomposição, contudo de forma diferente, parecendo usar a estratégia 10's, uma vez que após a indicação de soma as centenas, indica que soma as dezenas, uma a uma, e as unidades, uma a uma, dando a ideia de que primeiro pensa em  $100+100=200$  e depois pensa, sucessivamente, em  $200+20$ ;  $220+70$ ,  $290+5$  e  $295+5$ .

|               |                                     |
|---------------|-------------------------------------|
| $125 + 175 =$ | $100 + 100 + 20 + 70 + 5 + 5 = 300$ |
|---------------|-------------------------------------|

Figura 6 - Estratégia 10's (aluno O)

## ✓ SUBTRAÇÃO

Os alunos têm algumas dificuldades na subtração, Tal como a tabela seguinte mostra, a estratégia 'de saltos' N10 foi a estratégia que mais usaram.

|                            |                      |      | 37-5-2= | 152-98= | 1245-99= |
|----------------------------|----------------------|------|---------|---------|----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 6       | 1       | -        |
|                            |                      | N10C | -       | -       | -        |
|                            |                      | A10  | -       | -       | -        |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | -       | -       | -        |
|                            | Algoritmo            |      | 1       | 1       | 1        |
| Outra (O)                  |                      |      | 3       | -       | -        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 8       | 16      | 17       |

Tabela 3 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Os alunos apresentam diferentes registros quando usam a estratégia N10 persistindo em muitos o entendimento do sinal de igual como o de separador entre o procedimento e o resultado.

Figura 7 - Estratégia N10 (aluna D)

No caso da aluna E, aquando da realização da operação  $152-98$ , decompôs o 98 em  $90+8$  e realiza mentalmente a operação  $152-90$ , restando-lhe  $62-8$  para a conclusão do seu raciocínio.

Figura 8 - Estratégia N10 (aluna E)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** os alunos usaram procedimentos aditivos e multiplicativos. A tabela seguinte sintetiza as estratégias utilizadas pelos alunos neste tipo de operação.

|                            |                               |   | 25X2= | 25X20= | 1024X2= | 40X4= |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|--------|---------|-------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 4     | 1      | 3       | 3     |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -     | -      | 1       | -     |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -     | -      | -       | -     |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -     | -      | -       | -     |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | -     | -      | -       | -     |
|                            | Algoritmo                     |   | 1     | -      | 3       | 2     |
| Indicação do resultado     |                               |   | 4     | 1      | 3       | 4     |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 9     | 16     | 8       | 9     |

Tabela 4 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Para calcular **25x2**, o aluno R utiliza um procedimento aditivo, este parece associar 25x2 a 2x25 e depois adicionar 25 com 25.

|             |              |
|-------------|--------------|
| 25 X 2 = 50 | 25 + 25 = 50 |
|-------------|--------------|

Figura 9 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluno R)

A aluna F, para calcular **25x20**, parece usar o conhecimento de que 20 é igual 4x5 e que 25x4 é 100, fazendo 4x25 e adiciona posteriormente 5 vezes o resultado obtido.

|           |                                      |
|-----------|--------------------------------------|
| 25 X 20 = | 100 + 100 + 100 + 100 + 100<br>= 500 |
|-----------|--------------------------------------|

Figura 10 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna F)

Para calcular **1024x2**, os alunos usaram procedimentos aditivos e multiplicativos. A aluna C associa 1024x2 a 2x1024 e decompõe o 1024 em 1000+20+4, adicionando os fatores dois a dois, utilizando o sinal de igual não como equivalência de igualdades, mas como um separador de procedimentos.

|                 |  |
|-----------------|--|
| 1024 X 2 = 2048 | 1000 + 1000 = 2000 + 20 + 20 =<br>40 + 4 + 4 = 8 |
|-----------------|--|

Figura 11 - Procedimento aditivo - adicionar dois a dois (aluna C)

O aluno H faz a mesma associação inicial que a aluna C, contudo, posteriormente adiciona 1024+1024.

|                 |             |
|-----------------|-------------|
| 1024 X 2 = 2048 | 1024 + 1024 |
|-----------------|-------------|

Figura 12 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

A aluna J na resolução da mesma operação multiplica por 2 os dígitos do número 1024. Embora não usando uma disposição vertical pode-se considerar que esta aluna usa o algoritmo da multiplicação.

|                 |  |
|-----------------|--|
| 1024 X 2 = 2048 | 2 X 1 = 2<br>0 X 2 = 0<br>2 X 2 = 4<br>2 X 4 = 8 |
|-----------------|--|

Figura 13 - Algoritmo (aluna J)

Para calcular **1024x2**, três alunos indicam apenas o resultado como no exemplo seguinte apresentado pelo aluno P. Quando os alunos foram interpelados sobre isso a resposta que era dada é “fiz de cabeça”. Essa situação ocorreu ao longo de todo o estudo.

|            |                 |
|------------|-----------------|
| 1024 x 2 = | 1024 x 2 = 2048 |
|------------|-----------------|

Figura 14 – Indicação do resultado (aluno P)

Para calcular **40x4**, a aluna E pensou em 40x4 como 4x40 e utilizou procedimentos aditivos, mais precisamente adicionando sucessivamente. A aluna J continua a usar o algorítmico, embora não o representando verticalmente, multiplicando 4 por 0 e por 4.

|          |                         |
|----------|-------------------------|
| 40 x 4 = | 40 + 40 + 40 + 40 = 160 |
|----------|-------------------------|

Figura 15 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

|              |                                       |
|--------------|---------------------------------------|
| 40 x 4 = 160 | $4 \times 0 = 0$<br>$4 \times 4 = 16$ |
|--------------|---------------------------------------|

Figura 16 - Algoritmo (aluna J)

### Síntese da sessão:

Após a análise desta primeira sessão, podemos retirar algumas conclusões acerca das estratégias usadas inicialmente pelos alunos.

No caso da **adição**, as estratégias mais usadas pelos alunos são as que se prendem com a decomposição de parcelas, facilitando assim a adição.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 7         |
|                            | 1010         | 10's | 24        |
|                            | Algoritmo    |      | 5         |
| Outra (O)                  |              |      | 2         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 16        |

Tabela 5 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Na **subtração**, área em que apresentaram mais dificuldade, as poucas vezes em que foram usadas estratégias, os alunos optaram pela estratégia N10, estratégia de saltos.

| SUBTRAÇÃO                  |                      |      | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 7         |
|                            |                      | N10C | 0         |
|                            |                      | A10  | 0         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 0         |
|                            | Algoritmo            |      | 3         |
| Outra (O)                  |                      |      | 3         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 41        |

Tabela 6 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que diz respeito à **multiplicação** os alunos optaram pela utilização de procedimentos aditivos e pela utilização de outras estratégias, não especificando o seu raciocínio. No que diz respeito aos procedimentos aditivos, os alunos sentiram-se mais à vontade utilizando as adições sucessivas, usando raramente as adições dois a dois. É de referir que os alunos ainda não estabelecem relações entre as operações, quando existe essa possibilidade, facilitando a sua resolução.

| MULTIPLICAÇÃO              |                               |   | Nº alunos |
|----------------------------|-------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 11        |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | 1         |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 0         |
|                            | Algoritmo                     |   | 6         |
| Indicação do resultado     |                               |   | 12        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 42        |

Tabela 7 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

Nas tabelas referentes à adição e à subtração, quando é referido um determinado número de alunos que usou Outra estratégia, prende-se com o facto de apenas apresentarem o resultado ou realizarem a operação de uma forma que não se enquadra na totalidade noutra estratégia específica. Deste modo não é possível determinar qual a estratégia que os levou a obter este resultado.



## SESSÃO DE 13 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a tira de cálculo mental seguinte que os alunos resolveram em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 18 alunos.

|                 |
|-----------------|
| 226+1834=       |
| 2420+280+70+30= |
| 726+22+122=     |
| 78-26=          |
| 68-5=           |
| 108-29=         |
| 121x4=          |
| 28x5=           |
| 25x12=          |
| 90x11=          |

Tabela 8 – Tira de cálculo mental de 13/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões de **adição**, os alunos usaram essencialmente estratégias de decomposição, maioritariamente a estratégia 1010 em comparação com a estratégia 10's.

|                            |              |      | 226+1834= | 2420+280+70+30= | 726+22+122= |
|----------------------------|--------------|------|-----------|-----------------|-------------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 2         | 2               | 4           |
|                            | 1010         | 10's | -         | 1               | -           |
|                            | Algoritmo    |      | 1         | -               | 1           |
| Outro (0)                  |              |      | 1         | -               | 1           |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 14        | 15              | 12          |

Tabela 9 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para calcular **226+1834**, o aluno H apresenta uma resolução utilizando a estratégia 1010, através da decomposição dos fatores em ordens, no entanto o aluno não regista por escrito a soma de 200 com 800, a soma de 20 com 30 e a soma de 6 com 4, apresentando logo 1000+1000+50+10.

|                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| 226 + 1834 = 2060 | 1000 + 1000 + 50 + 10 |
|-------------------|-----------------------|

Figura 17 - Estratégia 1010 (aluno H)

Para calcular **2420+280+70+30**, o aluno P resolveu a operação utilizando a estratégia 1010 e o aluno R optou pela estratégia 10's. O aluno P decompôs as parcelas em ordens, somando posteriormente cada uma delas entre si. O aluno R também decompôs as parcelas facilitando assim a sua resolução, somando-as em seguida.

Figura 18 - Estratégia 1010 (aluno P)

Figura 19 - Estratégia 10's (aluno R)

Para calcular **726+22+122**, a aluna J utilizou a estratégia 1010 decompondo as parcelas em centenas, dezenas e unidades, agrupando-as e somando-as, adicionando os resultados de cada operação para obter o resultado final.

Figura 20 - Estratégia 1010 (aluna J)

## ✓ SUBTRAÇÃO

Na subtração os alunos usaram majoritariamente a decomposição de fatores. A tabela abaixo sintetiza as estratégias utilizadas pelos alunos nestas operações.

|                            |                      |      | 78-26= | 68-5= | 108-29= |
|----------------------------|----------------------|------|--------|-------|---------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 1      | 1     | 1       |
|                            |                      | N10C | -      | -     | -       |
|                            |                      | A10  | -      | -     | -       |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 3      | 2     | -       |
|                            | Algoritmo            |      | 2      | 1     | -       |
| Outra (0)                  |                      |      | 2      | 3     | 1       |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 10     | 11    | 16      |

Tabela 10 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Ao resolver **78-26**, os alunos apresentam estratégias de saltos e de decomposição na sua resolução. A aluna E opta pela utilização da estratégia N10, decompondo o subtrativo e subtraindo gradualmente as parcelas.

|           |                    |
|-----------|--------------------|
| 78 - 26 = | $48 - 20 - 6 = 52$ |
|-----------|--------------------|

Figura 21 - Estratégia N10 (aluna E)

A aluna M resolveu a mesma operação utilizando a estratégia de decomposição 1010, decompondo ambos os fatores da operação, resolvendo por classes.

|              |                            |
|--------------|----------------------------|
| 78 - 26 = 52 | $(70 + 8) - (20 + 6) = 52$ |
|--------------|----------------------------|

Figura 22 - Estratégia 1010 (aluna M)

Para calcular **68-5**, a aluna C utiliza o sinal de igual para separar procedimentos e não como sinal de igualdade, resolvendo a operação apresentada através da decomposição de fatores, decompondo o aditivo.

|             |                       |
|-------------|-----------------------|
| 68 - 5 = 63 | $8 - 5 = 3 + 60 = 63$ |
|-------------|-----------------------|

Figura 23 - Estratégia 1010 (aluna C)

A aluna C utiliza a estratégia de saltos, N10, decompondo o subtrativo, subtraindo gradualmente.

|          |                   |
|----------|-------------------|
| 68 - 5 = | $68 - 3 - 2 = 63$ |
|----------|-------------------|

Figura 24 - Estratégia N10 (aluna E)

Na última subtração (**108-29**) a aluna E resolveu da mesma forma que a operação anterior, decompondo o subtrativo para facilitar a resolução. A aluna resolve primeiro 108-20 e posteriormente subtrai 9 ao resultado.

|            |                     |
|------------|---------------------|
| 108 - 29 = | $108 - 20 - 9 = 49$ |
|------------|---------------------|

Figura 25 - Estratégia N10 (aluna E)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas multiplicações os alunos usaram procedimentos aditivos e multiplicativos. A tabela seguinte sintetiza as estratégias usadas pelos alunos nas multiplicações apresentadas nesta sessão.

|                            |                               |   | 121X4= | 28X5= | 25X12= | 90X11= |
|----------------------------|-------------------------------|---|--------|-------|--------|--------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 3      | 1     | 1      | -      |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -      | -     | -      | -      |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -      | -     | -      | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 3      | 1     | -      | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | -      | -     | -      | -      |
|                            | Algoritmo                     |   | 2      | -     | -      | -      |
| Indicação do resultado     |                               |   | 5      | 4     | 1      | 1      |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 5      | 12    | 16     | 17     |

Tabela 11 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Ao resolver **121x4**, a aluna D utilizou um procedimento aditivo (adicionou sucessivamente) pensando em 121x4 como 4x121. A aluna M optou por um procedimento multiplicativo (decomposição não decimal de um dos fatores).

Figura 26 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna D)

Figura 27 - Procedimento multiplicativo -decomposição não decimal de um dos fatores (aluna M)





Figura 28 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

Figura 28 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

|          |                           |
|----------|---------------------------|
| 28 X 5 = | $(20 + 8) \times 5 = 140$ |
|----------|---------------------------|

Figura 29 - Procedimento multiplicativo - decomposição não decimal de um dos fatores (aluno P)

Figura 29 - Procedimento multiplicativo - decomposição não decimal de um dos fatores (aluno P)



25 X 12 =

20 + 20 = 300

Figura 30 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

Figura 30 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

No que diz respeito à **adição**, os alunos apresentaram mais dificuldades na resolução das operações apresentadas, existindo um elevado número de alunos que errou ou não respondeu.

Tabela 12 – Síntese de estratégias nas operações de adição

29

anterior, os alunos já utilizaram a decomposição nas suas resoluções, mostrando alguma evolução.

| SUBTRAÇÃO                  |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos       | N10  | 3         |
|                            | N10          | N10C | 0         |
|                            |              | A10  | 0         |
|                            | Decomposição | 1010 | 5         |
|                            | 1010         |      |           |
| Algoritmo                  |              | 3    |           |
| Outra (0)                  |              |      | 6         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 37        |

Tabela 13 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que diz respeito à **multiplicação**, os alunos optam pelos dois procedimentos, aditivo e multiplicativo, existindo algum equilíbrio na sua utilização. Nos procedimentos aditivos os alunos optam por adicionar sucessivamente os fatores, ao invés de os adicionar dois a dois. E, nos procedimentos multiplicativos começaram a usar a propriedade distributiva da multiplicação, ou seja, a decomposição não decimal de um dos fatores. É de referir que ainda existe um elevado número de alunos que não responde ou erra neste tipo de questão.

| MULTIPLICAÇÃO              |                                  |   | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos<br>aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 5         |
|                            |                                  | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos<br>multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 4         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 0         |
|                            | Algoritmo                        |   | 2         |
| Indicação do resultado     |                                  |   | 11        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                                  |   | 50        |

Tabela 14 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 19 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei a seguinte tira de cálculo mental que os alunos resolveram em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 17 alunos.

|              |
|--------------|
| 1560+240=    |
| 326+32+52=   |
| 126+24+17+3= |
| 34-9=        |
| 76-22=       |
| 157-98=      |
| 24X2=        |
| 24X20=       |
| 325X3=       |
| 25X12=       |

Tabela 15 – Tira de cálculo mental de 19/11/2012

## ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões referentes à **adição**, os alunos utilizaram fundamentalmente estratégias de decomposição, maioritariamente a estratégia 1010 em comparação com a estratégia 10's. A seguinte tabela sintetiza as estratégias escolhidas pelos alunos neste tipo de operação durante esta sessão.

|                            |              |      | 1560+240= | 326+32+52= | 126+24+17+3= |
|----------------------------|--------------|------|-----------|------------|--------------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 6         | 7          | 4            |
|                            | 1010         | 10's | 1         | 1          | 2            |
|                            | Algoritmo    |      | 1         | -          | -            |
| Outra (O)                  |              |      | -         | -          | -            |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 9         | 9          | 11           |

Tabela 16 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para calcular **1560+240**, a aluna A usou uma estratégia com características próximas da 10's, decompondo as parcelas em ordens, adicionando-as sucessivamente da maior para a mais pequena. A aluna E utilizou a estratégia 1010, também de decomposição, adicionando as parcelas por classes, centenas com centenas, dezenas com dezenas e, por fim, adicionando os resultados obtidos.

|              |   |
|--------------|---|
| 1560 + 240 = | $1560 + 240 = 1000 + 500 + 200 + 60 + 40 + 0$<br>$+ 0 = 1800$ |
|--------------|---|

Figura 31 - Estratégia 10's (aluna A)

|                |   |
|----------------|---|
| $1560 + 240 =$ | $(1000 + 500 + 60) + (200 + 40) =$<br>$1000 + 200 + 100 = 1800$ |
|----------------|---|

Figura 32 - Estratégia 1010 (aluna E)

Para resolver  $326+32+52$ , os alunos optaram pela utilização das estratégias de decomposição. A aluna M parece ter usado a estratégia 10's, decompondo as parcelas e adicionando-as gradualmente; o aluno O utilizou a estratégia 1010, decompondo e adicionando as parcelas por classes, adicionando os resultados no final. Este aluno apresenta um raciocínio mais desenvolvido, não necessitando de escrever a decomposição para apresentar os resultados corretos, trabalhando a decomposição mentalmente.

|                   |  |
|-------------------|--|
| $326 + 32 + 52 =$ | $300 + 20 + 6 + 30 + 2 + 50 + 2 = 440$ |
|-------------------|--|

Figura 33 - Estratégia 10's (aluna M)

|                   |   |
|-------------------|---|
| $326 + 32 + 52 =$ | $326 + 32 + 52 = 440$<br>$300 + 100 + 10 = 410$ |
|-------------------|---|

Figura 34 - Estratégia 1010 (aluno O)

Na última adição ( $126+24+17+3$ ), os alunos optaram, tal como nas operações anteriores, pela decomposição de parcelas. A aluna N resolveu através da estratégia 1010, decompondo e organizando as parcelas por ordens, adicionando-as entre si, mostrando um raciocínio mais estruturado. O aluno B optou por uma estratégia que evoca a 10's, decompondo ambas as parcelas, tal como a aluna M na operação apresentada anteriormente, adicionando-os de forma sequencial.

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $126 + 24 + 17 + 3 =$ | $126 + 24 + 17 + 3 = (100 + 20 + 6) + (20 + 4) + (10 + 7) + (3)$<br>$100 + 50 + 20 = 170$ |
|-----------------------|---|

Figura 35 - Estratégia 1010 (aluna N)

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $126 + 24 + 17 + 3 =$ | $20 + 4 + 3 + 70 + 7 + 100 + 20 + 6 = 170$ |
|-----------------------|--|

Figura 36 - Estratégia 10's (aluno B)



## ✓ SUBTRAÇÃO

A **subtração** continua a revestir-se de algumas dificuldades por parte dos alunos, existindo uma grande quantidade de alunos que erra ou não responde. A linha numérica vazia é um modelo que começa a ser utilizada pelos alunos, facilitando assim o cálculo por saltos. A tabela seguinte sintetiza as estratégias utilizadas pelos alunos nas subtrações apresentadas nesta sessão.

|                            |                      |      | 34-9= | 76-22= | 157-98= |
|----------------------------|----------------------|------|-------|--------|---------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | -     | 2      | -       |
|                            |                      | N10C | -     | -      | -       |
|                            |                      | A10  | 1     | 3      | 2       |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 1     | 1      | -       |
|                            | Algoritmo            |      | 2     | 1      | -       |
| Outra (O)                  |                      |      | 6     | 3      | 1       |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 7     | 7      | 14      |

Tabela 17 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Para resolver **34-9**, os alunos utilizaram estratégias de saltos e decomposição, sendo que a estratégia A10, foi usada pela primeira vez nesta sessão, mostrando uma evolução no desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Para determinar o resultado desta operação a aluna C optou pela utilização linha numérica vazia. Inicialmente a aluna salta do 9 para o 10, ficando com um número mais “confortável” para atingir o seu objetivo (o 34), posteriormente da um salto de 10, e dois de 5 consecutivos até chegar ao 30, daí resta-lhe apenas um salto de 4 unidades para atingir o 34. Por fim, a aluna apenas necessitou de somar os “saltos” que deu para obter o resultado correto da subtração.

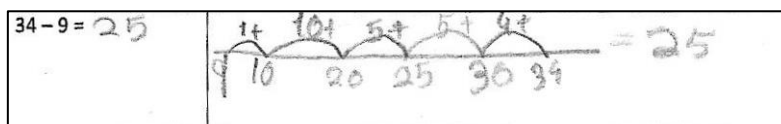


Figura 37 - Estratégia A10 (aluna C)

A aluna E preferiu utilizar uma estratégia de decomposição, mais precisamente a estratégia 1010. A aluna decompôs as duas parcelas, decompondo o 34 em 30+4 e o 9 em 4+5, desta forma a aluna “anulou” as 4 unidades, ficando com 30-5, facilitando a resolução da operação.

|            |                       |
|------------|-----------------------|
| $34 - 9 =$ | $30 + 4 - 4 - 5 = 25$ |
|------------|-----------------------|

Figura 38 - Estratégia 1010 (aluna E)

Para resolver esta operação, o aluno R optou pela utilização de uma estratégia semelhante à estratégia de saltos N10, mas, neste caso decompondo o aditivo, ficando com  $30+4$ . Posteriormente o aluno resolveu  $30-9$ , para depois adicionar 4. O aluno realizou parte do seu raciocínio mentalmente, não especificando todos os passos que deu.

|               |                   |
|---------------|-------------------|
| $34 - 9 = 25$ | $30 + 4 - 9 = 25$ |
|---------------|-------------------|

Figura 39 - Estratégia N10 (aluno R)

Para calcular **76-22**, a aluna A optou pela utilização da estratégia A10, registrando todos os passos que realizou. Inicialmente a aluna dá um “salto” mais pequeno, ficando com um número mais confortável para continuar o seu raciocínio, estabelecendo posteriormente dois “saltos” de 20 unidades cada, dando um mais pequeno de 6 unidades, sendo o que lhe faltava para atingir o objetivo. Por fim, regista a adição dos “saltos” efetuados, mostrando assim de forma completa a estratégia escolhida para esta operação.

|             |  |
|-------------|--|
| $76 - 22 =$ | $76 - 22 = 54$<br>$+8 \quad +20 \quad +20 \quad +6$<br>$22 \quad 30 \quad 50 \quad 56$<br>$8 + 20 + 20 + 6 = 54$ |
|-------------|--|

Figura 40 - Estratégia A10 (aluna A)

A aluna M, para resolver a mesma operação, optou pela utilização da estratégia de saltos N10. Decompondo ambos os fatores, a aluna subtrai gradualmente as dezenas com as dezenas e as unidades com as unidades, somando os resultados finais ( $50+4$ ). A aluna apresenta apenas a decomposição por escrito, tendo feito o restante raciocínio mentalmente, mostrando uma evolução no seu pensamento matemático.

|                |                   |
|----------------|-------------------|
| $76 - 22 = 54$ | $70 + 6 - 20 + 2$ |
|----------------|-------------------|

Figura 41 - Estratégia N10 (aluna M)

Na resolução da última subtração (**157-98**), apenas três alunos responderam corretamente, sendo que dois utilizaram a estratégia A10 e o outro apenas apresentou o resultado. O aluno P foi um dos alunos que utilizou a linha numérica vazia, este aluno não só utilizou a linha como a compensação, ou seja, em vez de iniciar os “saltos” em 98, optou por adicionar duas unidades, ficando com 100. Desta forma, o aluno em vez de dar os “saltos” até

chegar a 157, adicionou duas unidades e terminou no 159, compensando as duas unidades que tinha “emprestado” à parcela anterior. Esta estratégia mostra algum desenvolvimento no conhecimento dos números e da sua posição na reta numérica, e ainda o conhecimento que o aluno detém acerca das relações entre os números.

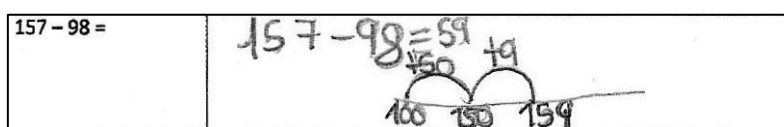


Figura 42 - Estratégia A10 (aluno P)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** os alunos apresentaram muitas dificuldades, existindo um número elevado de respostas incorretas ou de alunos que não responderam. Entre os alunos que responderam corretamente os procedimentos utilizados foram os aditivos e os multiplicativos. Contudo existe uma grande quantidade de alunos que apresentam outras estratégias, apresentando apenas o resultado das operações não especificando a forma como pensaram.

|                            |                               |   | 24X2= | 24X20= | 325X3= | 25X12= |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|--------|--------|--------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 4     | 1      | 1      | 2      |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -     | -      | -      | -      |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -     | -      | -      | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -     | -      | -      | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 2     | -      | -      | -      |
|                            | Algoritmo                     |   | 2     | -      | 2      | -      |
| Indicação do resultado     |                               |   | 4     | 1      | 3      | 1      |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 5     | 15     | 11     | 14     |

Tabela 18 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Para calcular **24x2**, os alunos apresentaram estratégias de procedimentos aditivos (adicionar sucessivamente) e multiplicativos (decomposição não decimal de um dos fatores). A aluna E apresenta-nos a sua resolução através de um procedimento aditivo, assumindo  $24 \times 2 = 2 \times 24$ , adicionando  $24+24$ . A aluna N resolveu através de um procedimento multiplicativo, fazendo a decomposição decimal de um dos fatores, ou seja, decompondo o 24 em  $20+4$  e, posteriormente, aplicando a propriedade distributiva em relação à adição. Apara a mesma operação, a aluna F apresenta-nos a sua resolução em forma de algoritmo, não um algoritmo convencional, mas algo mais desenvolvido, mostrando um possível avanço para um procedimento multiplicativo.

|                 |                |
|-----------------|----------------|
| $24 \times 2 =$ | $24 + 24 = 48$ |
|-----------------|----------------|

Figura 43 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

|                 |  |
|-----------------|--|
| $24 \times 2 =$ | $24 \times 2 = (20 + 4) \times (2) = 48$ |
|-----------------|--|

Figura 44 - Procedimento multiplicativo - decomposição decimal de um dos fatores (aluna N)

|                    |   |
|--------------------|---|
| $24 \times 2 = 48$ | $2 \times 4 = 8$<br>$2 \times 2 = 4 = 48$ |
|--------------------|---|

Figura 45 - Algoritmo (aluna F)

Na resolução de **24x20** o aluno H utilizou um procedimento aditivo, adicionando sucessivamente 20 vinte e quatro vezes. Representou o seu cálculo verticalmente e depois foi registando os valores da adição sucessiva de 2 (dezenas). O registo de valores parciais permitiu-lhe lidar como uma longa adição sem se perder.

$$\begin{array}{r}
 325 \\
 325 \\
 325 \\
 \hline
 975
 \end{array}$$

Figura 46 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

Na resolução de **325x3**, a maior parte dos alunos não respondeu ou deu uma resposta incorreta. O aluno R apresentou a sua resolução através de um procedimento aditivo, adicionando sucessivamente o 325, fazendo a associação que  $325 \times 3 = 3 \times 325$ .

|                      |                         |
|----------------------|-------------------------|
| $325 \times 3 = 975$ | $325 + 325 + 325 = 975$ |
|----------------------|-------------------------|

Figura 47 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno R)

Para resolver a última multiplicação apresentada (**25x12**), apenas três alunos responderam corretamente, sendo que dois utilizaram o mesmo procedimento aditivo (Adicionar sucessivamente) e o terceiro apenas indicou o resultado, não apresentando o seu raciocínio. A aluna E utilizou o mesmo procedimento que o aluno R na operação anterior, assumindo que  $25 \times 12$  é o mesmo que ter  $12 \times 25$ .

|                  |   |
|------------------|---|
| $25 \times 12 =$ | $25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 300$ |
|------------------|---|

Figura 48 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

## Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, os alunos apresentaram uma melhoria na utilização das estratégias, bem como o número de alunos que não respondeu ou errou baixou relativamente à sessão anterior. A utilização de estratégias de decomposição começa a ser mais usada pelos alunos, sendo a estratégia 1010 a que mais utilizaram.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 17        |
|                            | 1010         | 10's | 4         |
|                            | Algoritmo    |      | 1         |
| Outra (O)                  |              |      | 0         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 29        |

Tabela 19 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos mantêm as dificuldades sentidas anteriormente. Contudo, é notório um grande avanço dos alunos nesta sessão, a estratégia A10 começa a ser usada pelos alunos, mostrando uma evolução no seu raciocínio matemático.

| SUBTRAÇÃO                  |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Salto        | N10  | 2         |
|                            | N10          | N10C | 0         |
|                            |              | A10  | 6         |
|                            | Decomposição | 1010 | 2         |
|                            | 1010         |      |           |
|                            | Algoritmo    |      | 3         |
| Outra (O)                  |              |      | 10        |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 28        |

Tabela 20 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que concerne às questões relacionadas com a **multiplicação**, os alunos optam pela utilização de procedimentos aditivos (adicionar sucessivamente) e multiplicativos (decomposição decimal de um dos fatores), usam o algoritmo e em alguns casos apresentam apenas o resultado, não demonstrando o raciocínio utilizado. O número de alunos que não responde ou que erra continua alto comparativamente à sessão anterior. É de referir que não houve uma evolução dos alunos da sessão anterior para esta no que diz respeito à multiplicação.

| MULTIPLICAÇÃO              |                               |   | Nº alunos |
|----------------------------|-------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 8         |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 2         |
|                            | Algoritmo                     |   | 4         |
| Indicação do resultado     |                               |   | 9         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 45        |

Tabela 21 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 20 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a seguinte tira de cálculo mental, os alunos resolveram-na em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 18 alunos.

|                |
|----------------|
| 326+274=       |
| 125+245=       |
| 426+127+13+24= |
| 74-18=         |
| 47-12=         |
| 327-97=        |
| 50x3=          |
| 50x30=         |
| 12x4=          |
| 12x40=         |

Tabela 22 – Tira de cálculo mental de 20/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões referentes à **adição**, os alunos usaram maioritariamente as estratégias de decomposição, centrando-se bastante na estratégia 1010, como podemos observar na tabela abaixo.

|                            |              |      | 326+274= | 125+245= | 426+127+13+24= |
|----------------------------|--------------|------|----------|----------|----------------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 9        | 9        | 7              |
|                            | 1010         | 10's | 1        | 1        | -              |
|                            | Algoritmo    |      | 2        | 1        | 1              |
| Outra (O)                  |              |      | 1        | 1        | -              |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 5        | 6        | 10             |

Tabela 23 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para calcular **326+274**, a maior parte dos alunos centrou-se na decomposição de fatores, o aluno B parece usar a estratégia 10's e a aluna A usa a estratégia 1010. Em ambos os casos trata-se de uma decomposição de fatores, o aluno B decompõe os fatores e adiciona-os gradualmente, enquanto a aluna A decompõe os fatores e adiciona-os em classes, centenas com centenas, dezenas com dezenas e unidades com unidades. Ambos apresentam formas corretas de resolução, contudo com organizações diferentes.

Figura 49 - Estratégia 10's (aluno B)

Figura 50 - Estratégia 1010 (aluna A)

Nota-se que os alunos começam a apresentar as suas estratégias cada vez mais organizadamente. Por exemplo, para resolver **125+245** a aluna E apresenta uma resolução com a estratégia 1010 claramente indicada. O aluno B parece recorrer à estratégia 10's, decompondo as parcelas e parecendo adicioná-las gradualmente.

Figura 51 - Estratégia 1010 (aluna E)

Figura 52 - Estratégia 10's (aluno B)



Na última adição (**426+127+13+24**), grande parte optou pela estratégia 1010 em detrimento das outras. A aluna J apresenta separadamente as adições de cada classe, adicionando os resultados obtidos em cada uma delas de modo a obter o resultado final pretendido. A apresentação da estratégia é organizada, mostrando um raciocínio bem estruturado, bem como um bom conhecimento dos números.

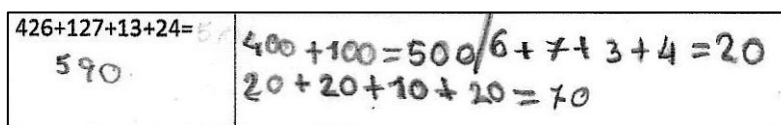


Figura 53 - Estratégia 1010 (aluna J)

## ✓ SUBTRAÇÃO

No que diz respeito à **subtração**, os alunos continuam a ter muitas dificuldades existindo um grande número de alunos que erra ou não respondem. Os alunos mostram-se reticentes em relação às estratégias de subtração, contudo nesta sessão houve um aumento da utilização da estratégia N10, bem como a continuação, embora fraca, da utilização da estratégia A10.

|                            |                      |      | 74-18= | 47-12= | 327-97= |
|----------------------------|----------------------|------|--------|--------|---------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | -      | 4      | 1       |
|                            |                      | N10C | -      | -      | -       |
|                            |                      | A10  | -      | 2      | -       |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 1      | -      | -       |
|                            | Algoritmo            |      | -      | 2      | -       |
| Outra (O)                  |                      |      | 2      | 5      | -       |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 15     | 5      | 17      |

Tabela 24 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Ao resolver **74-18**, a aluna N utilizou a estratégia 1010, decompondo ambos os fatores, resolvendo-os entre as suas classes, 70-10 e 8-4, culminando com 60-4 para obter o resultado final pretendido. Os alunos começam a mostrar as suas estratégias cada vez mais organizadas e estruturadas, denotando-se uma evolução na utilização das mesmas.

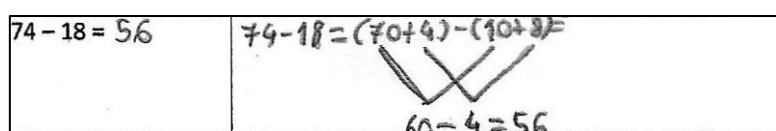


Figura 54 - Estratégia 1010 (aluna N)

Para calcular **47-12**, os alunos usaram dois tipos de estratégia, a estratégia de saltos N10 e a A10. A aluna A apresenta uma resolução através da utilização da estratégia A10. Esta realiza um “salto” de 8 unidades, do 12 até ao 20, ficando com um número mais fácil de trabalhar, dando logo de seguida um “salto” de 20 unidades, estabelecendo-se logo no 40, ficando apenas a 7 unidades do número que pretendia atingir. Em seguida, a aluna soma todos os “saltos” que deu de modo a obter o resultado final, indicando essa mesma operação  $8+20+7=35$ .

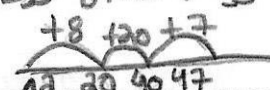
|          |  |
|----------|--|
| $47-12=$ | $47-12=35$ $8+20+7=35$<br> |
|----------|--|

Figura 55 - Estratégia A10 (aluna A)

No caso do aluno P, este preferiu usar a estratégia de saltos N10, apresentando uma estratégia organizada. O aluno decompõe mentalmente o subtrativo, ficando com  $10+2$ , retira inicialmente 2 unidades ao 47 e, por fim, retira as 10 unidades restantes ao resultado obtido. Neste caso o aluno usa o sinal de igual não como sinal de igualdade, mas sim como separador de procedimentos.

|          |                                    |
|----------|------------------------------------|
| $47-12=$ | $47-12=35$<br>$47-2=45$ $45-10=35$ |
|----------|------------------------------------|

Figura 56 - Estratégia N10 (aluno P)

Ao resolver **327-97**, o aluno P, mais uma vez, mostra a utilização da estratégia N10, bem organizada e estruturada. Inicialmente decompõe mentalmente o 97 em  $90+7$  e continua a operação retirando 7 unidades ao 327. Ao resultado obtido retira as 90 unidades restantes, obtendo o resultado final. Mais uma vez, neste caso o aluno utiliza o sinal de igual como usou na operação anterior, como separador de procedimentos. Os restantes alunos erraram ou nem sequer responderam a esta questão, tendo sido este o único a apresentar um raciocínio completamente correto.

|           |  |
|-----------|--|
| $327-97=$ | $327-97=230$<br>$327-7=320$ $320-90=230$ |
|-----------|--|

Figura 57 - Estratégia N10 (aluno P)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** os alunos continuam a apresentar alguma resistência a novas estratégias. A utilização de procedimentos aditivos está mais evidenciada em relação à

utilização dos procedimentos multiplicativos que, pouco ou nada, tem vindo a ser usados. Um grande número de alunos continua a apresentar apenas o resultado final, não especificando qualquer tipo de estratégia utilizada. A tabela seguinte mostra a distribuição das estratégias escolhidas durante esta sessão.

|                            |                               |   | 50X3= | 5X30= | 12X4= | 12X40= |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|-------|-------|--------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 4     | 2     | 3     | -      |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -     | -     | -     | -      |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -     | -     | -     | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -     | -     | -     | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | -     | -     | 1     | -      |
|                            | Algoritmo                     |   | 2     | 2     | 3     | 1      |
|                            | Indicação do resultado        |   | 7     | 6     | 6     | 3      |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               | 5   | 8     | 5     | 13    |        |

Tabela 25 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Para calcular **50x3**, a aluna M usou um procedimento aditivo, adicionando sucessivamente o 50, ou seja, a aluna pensou em 50x3 como 3x50.

Figura 58 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna C)

Na resolução de **5x30**, a aluna E utilizou o mesmo procedimento que a aluna C na operação anterior. Contudo, a aluna E estabeleceu uma relação diferente, esta assumiu que 5x30 é o mesmo que ter 15x10, adicionando sucessivamente o 10 (quinze vezes). Não disponho de dados que me permitam ter a certeza do modo como a aluna pensou pois o que apresenta pode traduzir o uso de um procedimento multiplicativo com alguma ‘sofisticação’

(multiplicar um dos fatores por 3 e dividir o outro fator por 3) ou revelar um desdobramento aditivo do 30 e aliá-lo ao fator 5.

|                 |  |
|-----------------|--|
| $5 \times 30 =$ | $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$<br>$+ 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$<br>$+ 10 = 150$ |
|-----------------|--|

Figura 59 - Outra estratégia (aluna E)

Na resolução da operação  $12 \times 4$ , a aluna E assumiu  $12 \times 4$  como  $4 \times 12$ , adicionando o 12 quatro vezes, usando um procedimento aditivo. Em contrapartida, a aluna M optou pela utilização de um procedimento multiplicativo, através da decomposição decimal de um dos fatores. A aluna decompôs o 12 em dezenas e unidades ( $10+2$ ), procedendo posteriormente à utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

|                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| $12 \times 4 =$ | $12 + 12 + 12 + 12 = 48$ |
|-----------------|--------------------------|

Figura 60 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

|                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| $12 \times 4 = 48$ | $(10+2) \times 4 = 48$ |
|--------------------|------------------------|

Figura 61 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluna M)

Na última multiplicação apresentada ( $12 \times 40$ ), a maior parte dos alunos não respondeu corretamente ou errou, alguns alunos apresentaram apenas o resultado, havendo apenas uma aluna que respondeu com a utilização do algoritmo.

|                      |   |
|----------------------|---|
| $12 \times 40 = 480$ | $12 \times 40 = 480$<br>$12 \times 4 = 48$<br>$12 \times 0 = 0$ |
|----------------------|---|

Figura 62 - Algoritmo (aluna D)

### Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, os alunos apresentaram melhores resultados, podendo observar-se uma evolução na utilização de estratégias. A decomposição, mais precisamente a estratégia 1010, continua a ser a mais usada pelos alunos comparando com a 10's. Comparando com a sessão anterior, um maior número de alunos respondeu corretamente, havendo um aumento de 8 alunos na utilização da estratégia 1010 e, uma diminuição de 8 alunos a errar ou a não responder.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 25        |
|                            | 1010         | 10's | 2         |
|                            | Algoritmo    |      | 4         |
| Outra (O)                  |              |      | 2         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 21        |

Tabela 26 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos continuam a apresentar grandes dificuldades, havendo um grande número de alunos que não respondem ou erram. Neste aspeto houve um aumento significativo, comparando com a última sessão, de 9 alunos. A utilização da estratégia de saltos A10 diminuiu um pouco, havendo um ligeiro aumento na utilização da estratégia N10.

| SUBTRAÇÃO                  |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos       | N10  | 5         |
|                            | N10          | N10C | 0         |
|                            |              | A10  | 2         |
|                            | Decomposição | 1010 | 1         |
|                            | 1010         |      |           |
|                            | Algoritmo    |      | 2         |
| Outra (O)                  |              |      | 7         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 37        |

Tabela 27 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que concerne às questões relacionadas com a **multiplicação**, os alunos melhoraram um pouco a sua performance, havendo uma diminuição de respostas incorretas. Aumentou significativamente o número de alunos que apenas apresenta o resultado ou que constrói as suas próprias estratégias, subiu de 9 para 22; e, diminuiu de 45 para 31 os alunos que não responderam ou erraram.

| MULTIPLICAÇÃO              |                               |   | Nº alunos |
|----------------------------|-------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 9         |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 1         |
|                            | Algoritmo                     |   | 8         |
| Indicação do resultado     |                               |   | 22        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 31        |

Tabela 28 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 21 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a seguinte tira de cálculo mental que os alunos resolveram em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 16 alunos.

|           |
|-----------|
| 203+97=   |
| 404+196=  |
| 73+40=    |
| 75-32=    |
| 326-96=   |
| 2816-997= |
| 60x3=     |
| 120x3=    |
| 25x3=     |
| 25x30=    |

Tabela 29 – Tira de cálculo mental de 21/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões referentes à **adição**, os alunos continuam a apresentar uma grande incidência na utilização das estratégias de decomposição, preferindo a estratégia 1010.

|                            |              |      | 203+97= | 404+196= | 73+40= |
|----------------------------|--------------|------|---------|----------|--------|
| Estratégia                 | Decomposição | 1010 | 5       | 4        | 6      |
|                            | 1010         | 10's | 1       | 2        | 3      |
|                            | Algoritmo    |      | 1       | 1        | 1      |
| Outra (O)                  |              |      | -       | 1        | 1      |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 9       | 8        | 5      |

Tabela 30 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para resolver **203+97**, os alunos mostram a sua preferência pela utilização da decomposição. O aluno O usa claramente a estratégia 1010, enquanto o aluno B usa uma estratégia muito semelhante à estratégia 10's.

Figura 63 - Estratégia 10's (aluno B)

Figura 64 - Estratégia 1010 (aluno O)

Para calcular **404+196**, o aluno B resolve da mesma forma que na operação anterior, e, de forma mais organizada, a aluna E apresenta-nos uma solução com base na estratégia 1010 bem estruturada e explicitada. Esta mostra-nos a decomposição de ambos os fatores e adiciona-os em classes posteriormente.

Figura 65 - Estratégia 10's (aluno B)

Figura 66 - Estratégia 1010 (aluna E)

Na última adição (**73+40**), os alunos apresentam estratégias bem elaboradas e organizadas, permitindo uma fácil leitura das mesmas. A aluna C apresenta-nos uma resolução ancorada na estratégia 1010, contudo esta aluna usa o sinal de igual como separador de

procedimentos e não como igualdade de fatores. Já a aluna D apresenta uma resolução com a estratégia 10's, decompondo os fatores, ordenando-os por classes e procedendo posteriormente à sua adição.

|                 |                           |
|-----------------|---------------------------|
| $73 + 40 = 113$ | $70 + 40 = 110 + 3 = 113$ |
|-----------------|---------------------------|

Figura 67 - Estratégia 1010 (aluna C)

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| $73 + 40 = 113$ | $70 + 40 + 3 + 0$ |
|-----------------|-------------------|

Figura 68 - Estratégia 10's (aluna D)

## ✓ SUBTRAÇÃO

No que diz respeito à **subtração** os alunos continuam muito reticentes na utilização de estratégias que os auxiliem na resolução das operações apresentadas. Continuam a aparecer muitas respostas erradas, ou até mesmo ausência de respostas.

|                            |                      |      | 75-32= | 326-96= | 2816-997= |
|----------------------------|----------------------|------|--------|---------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 1      | 1       | -         |
|                            |                      | N10C | -      | -       | -         |
|                            |                      | A10  | 2      | -       | -         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 1      | -       | -         |
|                            | Algoritmo            |      | 2      | 2       | -         |
| Outra (O)                  |                      |      | 3      | -       | -         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 7      | 13      | 16        |

Tabela 31 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Na resolução da primeira subtração (**75-32**) os alunos apresentaram uma maior diversidade de estratégias, usando saltos e decomposição. No que diz respeito à estratégia linear (saltos), as alunas A e E apresentam-nos duas opções de resolução, uma com a estratégia A10 e outra com a N10. A aluna A resolve a operação através da estratégia A10, através de “saltos” na linha numérica, iniciando em 35 e dando os “saltos” necessários até atingir o aditivo, neste caso o 75. Por fim, a aluna soma todos os “saltos” dados de modo a obter a resposta correta à operação. Numa outra perspectiva, a aluna E resolveu usar a estratégia de saltos N10, decompondo o subtrativo e subtraindo gradualmente os fatores.



|                 |  |
|-----------------|--|
| 75 - 32 =<br>43 | $75 - 32 = 8$<br>$+20 + 10 + 5 = 43$<br> |
|-----------------|--|

Figura 69 - Estratégia A10 (aluna A)

|                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| 75 - 32 =<br>43 | $45 - 30 - 2 = 43$ |
|-----------------|--------------------|

Figura 70 - Estratégia N10 (aluna E)

Usando uma outra forma de resolução, a aluna M resolveu utilizar a decomposição com a estratégia 1010. Decompondo ambos os fatores e resolvendo-os por classes, fazendo mentalmente  $70-30$  e  $5-2$ , adicionando no final os resultados obtidos por forma a apresentar um resultado correto.

|              |                        |
|--------------|------------------------|
| 75 - 32 = 43 | $(70+5) - (30+2) = 43$ |
|--------------|------------------------|

Figura 71 - Estratégia 1010 (aluna M)

Para calcular **326-96**, a estratégia N10 foi mais uma vez escolhida pela aluna E, apresentando uma resolução idêntica à primeira subtração. A aluna mostra-se consistente neste tipo de estratégia, explicitando claramente a forma correta como a expõe.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| 326 - 96 =<br>230 | $326 - 90 - 6 = 230$ |
|-------------------|----------------------|

Figura 72 - Estratégia N10 (aluna E)

Na última subtração (**2816-997**), nenhum dos alunos respondeu corretamente. Não tenho dados que me permitam saber qual a razão, contudo poderá ser o facto de serem números maiores que possam confundir o raciocínio estruturado que alguns alunos apresentam nesta sessão.

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** os alunos apresentaram uma melhoria nos resultados obtidos. Estes utilizam com alguma regularidade procedimentos aditivos, mais precisamente adicionam sucessivamente e usam procedimentos multiplicativos com a utilização da decomposição decimal de um dos fatores. Aos poucos os alunos começam a interiorizar algumas estratégias

e, alguns deles começam a criar estratégias muito próprias. Contudo, é de referir que existe ainda um grande número de alunos que não respondem ou que erram.

|                            |                               |   | 60X3= | 120X3= | 25X3= | 25X30= |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|--------|-------|--------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 3     | 3      | 5     | -      |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -     | -      | -     | -      |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -     | -      | -     | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -     | -      | -     | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | -     | 2      | 1     | -      |
|                            | Algoritmo                     |   | 1     | 2      | -     | -      |
|                            | Indicação do resultado        |   | 5     | 4      | 4     | 1      |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               | 7   | 5     | 6      | 15    |        |

Tabela 32 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

A utilização dos procedimentos aditivos, mais concretamente adicionando sucessivamente, continua a ser a estratégia escolhida por grande parte dos alunos. Tanto na primeira (**60x3**) como na segunda (**120x3**) operação os alunos aplicaram essa estratégia, como se pode ver no exemplo do aluno H que apresentou de forma organizada o seu raciocínio. Note-se, no entanto, que este aluno interpreta 60x3 como 3x60, não se sabendo se o faz por usar a propriedade comutativa ou se por um entendimento incorreto do sentido de multiplicar.

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| 60 X 3 = 180 | 60 + 60 + 60 = 180 |
|--------------|--------------------|

Figura 73 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

|               |                       |
|---------------|-----------------------|
| 120 X 3 = 360 | 120 + 120 + 120 = 360 |
|---------------|-----------------------|

Figura 74 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

Na segunda operação (**120x3**) a aluna M optou pela utilização de um procedimento multiplicativo, decompondo o 120 em classes, e, aplicando em seguida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

|                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| $120 \times 3 = 360$ | $(100 + 20) \times 3 = 360$ |
|----------------------|-----------------------------|

Figura 75 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluna M)

O mesmo procedimento foi usado na operação seguinte (**25x3**), o aluno B utilizou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, após ter decomposto o 25 em 20+5.

|                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| $25 \times 3 = 75$ | $(20 + 5) \times 3 = 75$ |
|--------------------|--------------------------|

Figura 76 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno B)

A aluna F utiliza um procedimento aditivo para a resolução da referida anteriormente (**25x3**), esta adiciona o 25 sucessivamente três vezes, de modo a obter o valor correto.

|                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| $25 \times 3 = 75$ | $25 + 25 + 25 = 75$ |
|--------------------|---------------------|

Figura 77 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna F)

Na última operação (**25x30**) todos os alunos erraram ou não responderam.

### Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, os alunos baixaram um pouco os seus resultados comparativamente à sessão anterior. Os alunos alteraram a sua prestação em relação às estratégias de decomposição, diminuindo a sua produtividade em relação à estratégia 1010 e aumentando em relação à estratégia 10's. No que diz respeito aos alunos que não respondem ou que simplesmente erram este valor não difere muito da sessão anterior.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 15        |
|                            | 1010         | 10's | 6         |
|                            | Algoritmo    |      | 3         |
| Outra (O)                  |              |      | 2         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 22        |

Tabela 33 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos continuam a apresentar muitas dificuldades na apresentação de estratégias. Estes continuam a usar a estratégia N10, embora com menos incidência e, a manter a utilização da estratégia A10. O número de alunos a não responder manteve-se quase inalterável, demonstrando as dificuldades que surgem neste tipo de operação.

| SUBTRAÇÃO                  |                          |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br><br>N10        | N10  | 2         |
|                            |                          | N10C | 0         |
|                            |                          | A10  | 2         |
|                            | Decomposição<br><br>1010 | 1010 | 1         |
|                            | Algoritmo                |      | 4         |
| Outra (O)                  |                          |      | 3         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                          |      | 36        |

Tabela 34 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que concerne às questões relacionadas com a **multiplicação**, os resultados oscilaram um pouco relativamente à sessão anterior. É de referir que houve aumentos na utilização de procedimentos, na utilização de procedimentos aditivos (adicionar sucessivamente) e nos procedimentos multiplicativos, mais concretamente na decomposição decimal de um dos fatores. Os restantes procedimentos específicos não têm sido usados pelos alunos, sendo que a maioria apenas apresenta o resultado não especificando a estratégia usada.

| MULTIPLICAÇÃO              |                                  |   | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos<br>aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 11        |
|                            |                                  | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos<br>multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 3         |
|                            | Algoritmo                        |   | 3         |
| Indicação do resultado     |                                  |   | 14        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                                  |   | 33        |

Tabela 35 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 26 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a seguinte tira de cálculo mental que os alunos resolveram em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 19 alunos.

|           |
|-----------|
| 57+21=    |
| 395+105=  |
| 502+108=  |
| 47-17=    |
| 247-99=   |
| 1008-998= |
| 30x3=     |
| 30x30=    |
| 43x11=    |
| 55x101=   |

Tabela 36 – Tira de cálculo mental de 26/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Nas adições os alunos aumentaram significativamente a utilização da decomposição de fatores, mais concretamente a estratégia 1010, tal como podemos ver na tabela seguinte.

|                            |              |      | 57+21= | 395+105= | 502+108= |
|----------------------------|--------------|------|--------|----------|----------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 13     | 9        | 13       |
|                            | 1010         | 10's | 3      | 2        | 1        |
|                            | Algoritmo    |      | 2      | 2        | 1        |
| Outra (O)                  |              |      | -      | -        | -        |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 1      | 6        | 4        |

Tabela 37 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para calcular **57+21**, a aluna C apresenta-nos a sua resolução através da implementação da estratégia 1010, decompondo os termos e adicionando-os por classes. A aluna mostra um raciocínio organizado. O aluno B apresenta uma resolução que aparenta ser uma estratégia 10's, decompondo os termos e adicionando-os gradualmente.

|                |   |
|----------------|---|
| $57 + 21 = 78$ | $50 + 7 + 20 + 1$<br>$\swarrow \quad \searrow$<br>$70 + 8 = 78$ |
|----------------|---|

Figura 78 - Estratégia 1010 (aluna C)

|                |                        |
|----------------|------------------------|
| $57 + 21 = 78$ | $50 + 20 + 1 + 7 = 78$ |
|----------------|------------------------|

Figura 79 - Estratégia 10's (aluno B)

Mais uma vez nesta sessão, e para resolver  $395 + 105$ , os alunos apresentam resoluções que aparentam ser a estratégia 10's, enquanto outros apresentam estratégias claramente definidas, como o aluno P através da estratégia 1010. O aluno P apresenta uma decomposição de ambos os fatores e posteriormente apresenta soma dos mesmos por classes, adicionando-as no final para obter o resultado pretendido.

|                   |                                  |
|-------------------|----------------------------------|
| $395 + 105 = 500$ | $300 + 100 + 5 + 90 + 5 = 500$ ✓ |
|-------------------|----------------------------------|

Figura 80 - Estratégia 10's (aluno B)

|                   |   |
|-------------------|---|
| $395 + 105 = 500$ | $(300 + 90 + 5) + (100 + 5)$<br>$400 + 90 + 10 = 500$ |
|-------------------|---|

Figura 81 - Estratégia 1010 (aluno P)

Na última adição ( $502 + 108$ ), os alunos usam as estratégias de forma semelhante às apresentadas nas adições anteriores. A aluna M parece usar a estratégia 10's e a aluna D a estratégia 1010. Em ambos os casos as alunas procedem à decomposição dos fatores, embora organizando-a de forma diferente.

|                   |  |
|-------------------|--|
| $502 + 108 = 610$ | $500 + 2 + 100 + 8$<br>$\swarrow \quad \searrow$<br>$600 + 10 = 610$ |
|-------------------|--|

Figura 82 - Estratégia 1010 (aluna D)

|                   |                           |
|-------------------|---------------------------|
| $502 + 108 = 610$ | $500 + 2 + 100 + 8 = 610$ |
|-------------------|---------------------------|

Figura 83 - Estratégia 10's (aluna M)

## ✓ SUBTRAÇÃO

No que diz respeito à **subtração** a compreensão dos alunos parece ter melhorado pois aumentou bastante a utilização da estratégia de saltos A10 e a de decomposição 1010. Porém o número de alunos que não respondeu ou errou manteve-se equiparado com a sessão anterior.

|                            |                      |      | 47-17= | 247-99= | 1008-998= |
|----------------------------|----------------------|------|--------|---------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 2      | -       | -         |
|                            |                      | N10C | -      | -       | -         |
|                            |                      | A10  | 4      | 2       | 4         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 4      | 1       | 1         |
|                            | Algoritmo            |      | 2      | 1       | 1         |
| Outra (O)                  |                      |      | 2      | -       | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 5      | 15      | 12        |

Tabela 38 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Ao apresentar a resolução das duas primeiras subtrações, **47-17** e **247-99**, as alunas A e C utilizaram a estratégias de saltos A10. Ambas as alunas apresentam uma linha e os seus “saltos” bem identificados e estruturados, permitindo a sua leitura de forma clara e objetiva.

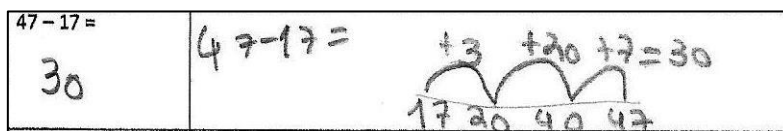


Figura 84 - Estratégia A10 (aluna A)

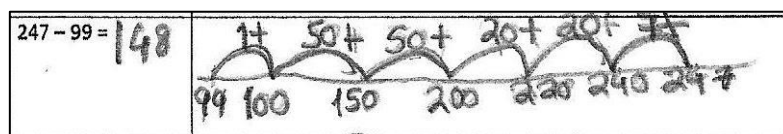


Figura 85 - Estratégia A10 (aluna C)

Na última subtração (**1008-998**), o aluno B apresenta uma resolução através da utilização da estratégia de decomposição 1010. O aluno decompõe ambos os fatores e “corta” automaticamente os valores que se anulam, neste caso o 8, necessitando apenas de retirar ao 1000 o 900 e, posteriormente ao resultado subtrair 90. O aluno H optou, na mesma operação, pela estratégia de saltos, recorrendo à estratégia A10 através da utilização da linha numérica, dando os “saltos” que necessitava para atingir o seu objetivo, neste caso o 1008.

$$1008 - 998 = 10$$

$$(1000 + 8) - (900 + 90 + 8) = 10$$

Figura 86 - Estratégia 1010 (aluno B)

$$1008 - 998 = 10$$

Figura 87 - Estratégia A10 (aluno H)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nesta sessão no que diz respeito às **multiplicações** os alunos regrediram bastante em relação à sessão anterior. Houve resultados positivos apenas nas duas primeiras multiplicações existindo um decréscimo elevado na produtividade dos alunos. A tabela abaixo reflete os resultados obtidos após a análise dos dados desta sessão.

|                            |                               |   | 30X3= | 30X30= | 43X11= | 55X101= |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|--------|--------|---------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 7     | -      | -      | -       |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -     | -      | -      | -       |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -     | 1      | -      | -       |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -     | -      | -      | -       |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | -     | -      | -      | -       |
|                            | Algoritmo                     |   | 5     | 1      | -      | -       |
| Indicação do resultado     |                               |   | 5     | 10     | -      | -       |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 2     | 7      | 19     | 19      |

Tabela 39 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Na resolução de **30x3**, o único procedimento usado pelos alunos foi o procedimento aditivo, mais concretamente o que se refere à adição sucessiva, tal como mostra o exemplo da aluna E.



|                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| $30 \times 3 =$<br>90 | $30 + 30 + 30 = 90$ |
|-----------------------|---------------------|

Figura 88 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E)

Para calcular  $30 \times 30$ , a aluna J usou um procedimento multiplicativo que ainda nenhum aluno tinha aplicado, esta usou o seu conhecimento pelos múltiplos de 10. A aluna tornou-a simples referindo que “acrescento o 0 no fim e fica 900”, mostrando claramente o seu raciocínio.

|                      |  |
|----------------------|--|
| $30 \times 30 =$ 900 | $30 + 30 + 30 = 90$ acrescento o<br>0 no fim e fica<br>900 |
|----------------------|--|

Figura 89 - Procedimento multiplicativo – usar múltiplos de 5 e de 10 (aluna J)

Tanto na resolução da operação  $43 \times 11$ , como na última multiplicação apresentada ( $55 \times 101$ ), não houve nenhuma resposta correta por parte dos alunos, evidenciando assim a sua dificuldade nas questões relacionadas com a multiplicação.

### Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, o desempenho dos alunos melhorou bastante, mostrando o seu desempenho e abertura para a utilização das estratégias. A utilização da estratégia 1010 aumentou significativamente de 15 (na sessão anterior) para 35 utilizações nesta sessão. As restantes formas de resolução mantiveram-se estáveis em comparação com a sessão anterior.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 35        |
|                            | 1010         | 10's | 6         |
|                            | Algoritmo    |      | 5         |
| Outra (O)                  |              |      | 0         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 11        |

Tabela 40 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos mantiveram algumas das dificuldades apresentadas em sessões anteriores, contudo é de referir que as melhorias também se fizeram notar. A estratégia A10 teve um aumento de 2 utilizações na sessão anterior para 10 na presente sessão, o que denota um empenho e evolução na resolução deste tipo de questão. É de salientar também o aumento da estratégia 1010, demonstrando que os alunos começam a

abrir horizontes para novas formas de resolução, novas estratégias que complementam o seu raciocínio.

| SUBTRAÇÃO                  |                      |      | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 2         |
|                            |                      | N10C | 0         |
|                            |                      | A10  | 10        |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 6         |
|                            | Algoritmo            |      | 4         |
| Outra (O)                  |                      |      | 3         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 32        |

Tabela 41 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

Na **multiplicação** o desempenho dos alunos piorou, havendo uma descida dos resultados obtidos em sessões anteriores, denotando-se um aumento significativo de alunos que errou ou não respondeu. É de referir que nesta sessão foi usado pela primeira vez o conhecimento dos alunos pelos múltiplos, neste caso os múltiplos de 10, mostrando assim alguma evolução por parte dos alunos na utilização de estratégias referentes aos procedimentos multiplicativos.

| MULTIPLICAÇÃO              |                                  |   | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos<br>aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 7         |
|                            |                                  | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos<br>multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 1         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 0         |
|                            | Algoritmo                        |   | 6         |
| Indicação do resultado     |                                  |   | 15        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                                  |   | 47        |

Tabela 42 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 27 NOVEMBRO

Nesta aula os 19 alunos resolveram a seguinte tira de cálculo mental, que resolveram em 15 minutos.

|            |
|------------|
| 27+57=     |
| 244+66=    |
| 27+103+80= |
| 102-22=    |
| 127-98=    |
| 1526-998=  |
| 180x2=     |
| 180x20=    |
| 1245x4=    |
| 400x4=     |

Tabela 43 – Tira de cálculo mental de 27/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Para resolver as questões referentes à **adição**, os alunos recorreram bastante às estratégias de decomposição, de forma mais intensa à 1010 em relação à 10's. A tabela abaixo mostra a distribuição das estratégias que os alunos usaram nesta sessão.

|                            |              |      | 27+57= | 244+66= | 27+103+80= |
|----------------------------|--------------|------|--------|---------|------------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 11     | 10      | 8          |
|                            | 1010         | 10's | 3      | 2       | 3          |
|                            | Algoritmo    |      | 1      | -       | -          |
| Outra (O)                  |              |      | 1      | 1       | 1          |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 3      | 6       | 7          |

Tabela 44 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para resolver **27+57** o aluno B usa a estratégia 10's (mais organizada que nas sessões anteriores) e a aluna E a estratégia 1010. Em ambas as resoluções os alunos recorreram à decomposição de fatores, apresentando a decomposição de forma diferente, mas igualmente organizada.

|              |                        |
|--------------|------------------------|
| 27 + 57 = 84 | $20 + 50 + 7 + 7 = 84$ |
|--------------|------------------------|

Figura 90 - Estratégia 10's (aluno B)

|                     |   |
|---------------------|---|
| $27 + 57 =$<br>$84$ | $(20 + 7) + (50 + 7) =$<br>$70 + 14 = 84$ |
|---------------------|---|

Figura 91 - Estratégia 1010 (aluna E)

Para calcular **244+166**, a aluna J apresenta uma resolução bastante organizada usando a estratégia 1010, adicionando os fatores decompostos por classes. Por outro lado, a aluna M aparenta usar a estratégia 10's, decompondo ambos os fatores e adicionando cada um deles de forma sequencial.

|                  |   |
|------------------|---|
| $244 + 66 = 310$ | $200 + 10 = 210$<br>$40 + 60 = 100$<br>$4 + 6 = 10$ |
|------------------|---|

Figura 92 - Estratégia 1010 (aluna J)

|                  |                               |
|------------------|-------------------------------|
| $244 + 66 = 310$ | $200 + 40 + 4 + 60 + 6 = 310$ |
|------------------|-------------------------------|

Figura 93 - Estratégia 10's (aluna M)

Na última adição (**27+103+80**) a decomposição de fatores continua a ser a estratégia predileta dos alunos, havendo uma preferência pela estratégia 1010. Ambas as alunas apresentam estratégias de decomposição, a aluna C com uma estratégia mais estruturada indicando as adições que faz posteriormente; e, a aluna F que parece usar a estratégia 10's, apresentando a decomposição de ambos os fatores procedendo à adição gradual dos mesmos.

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $27 + 103 + 80 =$<br>$210$ | $20 + 7 + 100 + 3 + 80$<br>$100 + 100 + 10 = 210$ |
|----------------------------|---|

Figura 94 - Estratégia 1010 (aluna C)

|                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| $27 + 103 + 80 =$<br>$210$ | $20 + 7 + 100 + 3 + 80 = 210$ |
|----------------------------|-------------------------------|

Figura 95 - Estratégia 10's (aluna F)

## ✓ SUBTRAÇÃO

A **subtração** continua a levantar muitas dificuldades por parte aos alunos. A estratégia A10 continua a ser bastante usada pelos alunos na resolução das operações apresentadas. Todavia, o número de alunos que erra ou não responde continua elevado, fazendo denotar a dificuldade por eles sentida.

|                            |                      |      | 102-22= | 127-98= | 1526-998= |
|----------------------------|----------------------|------|---------|---------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | -       | -       | -         |
|                            |                      | N10C | -       | -       | -         |
|                            |                      | A10  | 4       | 4       | 3         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 2       | 2       | -         |
|                            | Algoritmo            |      | -       | -       | -         |
| Outra (O)                  |                      |      | 1       | 1       | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 12      | 12      | 15        |

Tabela 45 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Ao resolver **102-22**, os alunos optaram entre a estratégia de saltos A10, representada pela aluna A e pela decomposição através do exemplo da aluna F usando a estratégia 1010. A aluna A exibe uma resolução disposta numa linha, a linha numérica vazia, dando os “saltos” que necessita para ir do subtrativo (22) até ao aditivo (102), adicionando todos os “saltos” dados para obter o resultado final. Numa outra perspetiva, a aluna F apresenta uma decomposição de termos, usando a estratégia 1010, a aluna “corta” de imediato os fatores que se anulam ficando apenas com a subtração 100-20 para realizar, facilitando o seu raciocínio.

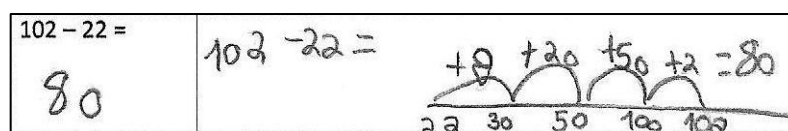


Figura 96 - Estratégia A10 (aluna A)

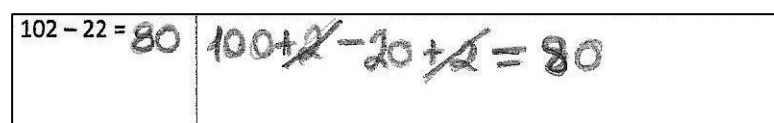


Figura 97 - Estratégia 1010 (aluna F)

Para calcular **127-98**, os alunos dividem-se entre saltos (estratégia linear) e decomposições, neste caso a aluna C apresenta uma estratégia de saltos e a aluna E uma estratégia de decomposição. A aluna C resolve a operação recorrendo à estratégia A10, auxiliando-se na linha numérica vazia para fazer os seus cálculos. Contudo, a aluna E apresenta uma resolução, igualmente correta, que aparenta a utilização da estratégia 1010, decompondo ambos os fatores e resolvendo através das classes.

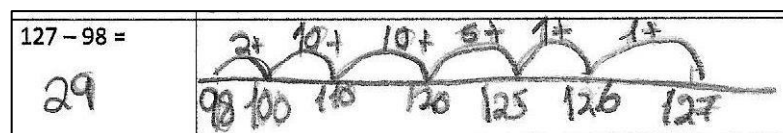


Figura 98 - Estratégia A10 (aluna C)

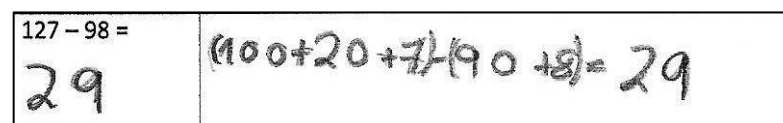


Figura 99 - Estratégia 1010 (aluna E)

Na última subtração (**1526-998**), o aluno P representa a sua resolução através da linha numérica vazia, usando a estratégia A10. O aluno apresenta apenas dois “saltos”, sendo o primeiro apenas de duas unidades estabelecendo-se assim num número mais confortável para a realização da operação, pois assim apenas necessita de mais um “salto” de 526 unidades para atingir o seu objetivo.

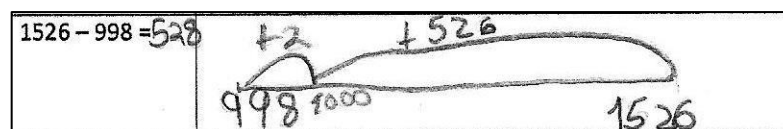


Figura 100 - Estratégia A10 (aluno P)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** os alunos apresentaram algumas melhorias na utilização dos procedimentos multiplicativos, voltando a usá-los nesta sessão. No que se refere aos procedimentos aditivos, voltou a ser usado o procedimento de adição dois a dois, usado unicamente na primeira sessão. Tal feito acontece também com a utilização da decomposição não decimal de fatores, que foi usada anteriormente apenas na segunda sessão.

|                            |                               |   | 180x2= | 180x20= | 1245x4= | 400x4= |
|----------------------------|-------------------------------|---|--------|---------|---------|--------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 2      | -       | 2       | 5      |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | 1      | -       | -       | -      |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -      | 1       | -       | -      |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -      | -       | -       | 1      |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 1      | 1       | -       | -      |
|                            | Algoritmo                     |   | 1      | 1       | -       | 1      |
| Indicação do resultado     |                               |   | 3      | 3       | 3       | 7      |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               |   | 11     | 13      | 14      | 5      |

Tabela 46 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Nesta primeira multiplicação (**180x2**) os alunos recorreram a um leque mais variado de estratégias. A aluna C e a aluna J usaram procedimentos aditivos, - adicionar dois a dois (aluna C) e adicionar sucessivamente (aluna J) - e, o aluno O optou pela utilização da decomposição decimal de um dos fatores (procedimento multiplicativo).

A aluna C associa 180x2 a 2x180 e decompõe o 180 em 100+80, adicionando os fatores dois a dois, adicionando os dois resultados obtidos para finalizar a operação. A aluna J, que apresenta também um procedimento aditivo, faz a mesma associação inicial que a aluna C, contudo esta adiciona 180 com 180. Já o aluno O apresenta uma resolução completamente diferente, este recorre à utilização de um procedimento multiplicativo, decompondo o 180 em 100+80 e, multiplicando cada um dos fatores por dois, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Handwritten work for  $180 \times 2 = 360$ . The student shows the decomposition of 180 into 100 and 80, multiplies each by 2, and then adds the results:  $100 + 100 = 200$  and  $80 + 80 = 160$ , leading to  $200 + 160 = 360$ .

Figura 101 - Procedimento aditivo – adicionar dois a dois (aluna C)

|                      |                   |
|----------------------|-------------------|
| $180 \times 2 = 360$ | $180 + 180 = 360$ |
|----------------------|-------------------|

Figura 102 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna J)

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $180 \times 2 =$<br>$360$ | $180 \times 2 = 100 \times 2 + 80 \times 2 = 360$ ✓ |
|---------------------------|---|

Figura 103 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O)

Na resolução da operação **180x20**, os alunos apresentaram resultados um pouco mais fracos, não tendo recorrido sequer à utilização de procedimentos aditivos para a resolução da operação. O aluno O, tal como na operação anterior, recorreu à decomposição decimal de um dos fatores, neste caso o 180, resolvendo da mesma forma que foi explicitado na operação anterior. Por outro lado, o aluno P estabeleceu relação com a operação anterior, sabendo que  $180 \times 2 = 360$  apenas teria de acrescentar um 0 para obter o resultado correto.

|                   |   |
|-------------------|---|
| $180 \times 20 =$ | $180 \times 20 = 100 \times 20 + 80 \times 20 = 3600$ ✓ |
|-------------------|---|

Figura 104 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O)

|                        |   |
|------------------------|---|
| $180 \times 20 = 3600$ | $180 \times 2 = 360$ acrescentar 0 = 3600 |
|------------------------|---|

Figura 105 – Procedimento multiplicativo – usar múltiplos de 5 e de 10 (aluno P)

Para calcular **1245x4**, a aluna E optou pela utilização do procedimento aditivo, assumindo que  $1245 \times 4$  é o mesmo que  $4 \times 1245$ , a aluna adiciona quatro vezes 1245 por forma a obter o resultado correto.

|                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| $1245 \times 4 =$<br>$4980$ | $1245 + 1245 + 1245 + 1245 = 4980$ |
|-----------------------------|------------------------------------|

Figura 106 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E)

Para resolver a última multiplicação apresentada (**400x4**), os alunos continuam a preferir os procedimentos aditivos. A aluna A apresenta uma resolução baseada na aplicação de uma decomposição não decimal de um dos fatores e a aluna E apresenta um procedimento aditivo em que adiciona sucessivamente o 400 quatro vezes.



|           |   |
|-----------|---|
| 400 X 4 = | $400 \times 4 = (4 \times 100) + (4 \times 100) + (4 \times 100) + (4 \times 100) =$<br>$100 + 100 + 100 + 100 = 400 + 400 + 400 + 400 = 1600 \checkmark$ |
| 1600      |   |

Figura 107 - Procedimento multiplicativo – decomposição não decimal de um dos fatores (aluna A)

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
| 400 X 4 = | $400 + 400 + 400 + 400 = 1600$ |
| 1600      |                                |

Figura 108 - Procedimento aditivo – adicionar sucessivamente (aluna E)

### Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, a performance dos alunos ficou um pouco aquém da sessão anterior, havendo uma diminuição da utilização das estratégias e um aumento nas respostas erradas ou na ausência das mesmas. Contudo, é de referir que, na generalidade, os alunos têm vindo a progredir na utilização das estratégias a fim de aumentarem o seu conhecimento matemático em relação aos números.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 29        |
|                            | 1010         | 10's | 8         |
|                            | Algoritmo    |      | 1         |
| Outra (O)                  |              |      | 3         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 16        |

Tabela 47 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos continuam com algumas dificuldades na utilização das estratégias, mostrando-se por vezes reticentes na sua utilização. Existe um grande número de erros (ou que simplesmente não respondem), fazendo com que os resultados obtidos não sejam tao favoráveis como se pretendia. É de valorizar a manutenção da utilização da estratégia de saltos A10, mostrando alguma consistência na elaboração de raciocínio matemático.

| SUBTRAÇÃO                  |                      |      | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 0         |
|                            |                      | N10C | 0         |
|                            |                      | A10  | 11        |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 4         |
|                            | Algoritmo            |      | 0         |
| Outra (O)                  |                      |      | 3         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 39        |

Tabela 48 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que concerne às questões relacionadas com a **multiplicação**, os alunos melhoraram em relação à sessão anterior, apresentando uma maior diversidade de estratégias, dividindo-se entre procedimentos aditivos e multiplicativos. Embora progridam em alguns aspetos, os alunos continuam a errar muito ou simplesmente a não responder às operações, não consigo precisar se por demorarem mais tempo nas outras questões ou mesmo por não saberem responder corretamente. São também muitos os alunos que apresentam apenas os resultados, não explicitando a forma como pensaram para que a sua resposta fosse correta.

| MULTIPLICAÇÃO              |                                  |   | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos<br>aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 9         |
|                            |                                  | Adicionar dois a dois                               | 1         |
|                            | Procedimentos<br>multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 1         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 4         |
|                            | Algoritmo                        |   | 3         |
| Indicação do resultado     |                                  |   | 16        |
| Não respondeu (NR) / Errou |                                  |   | 43        |

Tabela 49 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

## SESSÃO DE 28 NOVEMBRO

Nesta aula apresentei aos alunos a seguinte tira de cálculo mental, que foi resolvida em 15 minutos. Esta sessão contou com a presença de 18 alunos.

|           |
|-----------|
| 112+37=   |
| 1520+482= |
| 32+54+13= |
| 77-26=    |
| 342-95=   |
| 5326-999= |
| 150x3=    |
| 75x6=     |
| 12x5=     |
| 24x5=     |

Tabela 50 – Tira de cálculo mental de 28/11/2012

### ✓ ADIÇÃO

Nesta última sessão, no que diz respeito às questões da **adição**, os alunos mostram-se muito consistentes na escolha da estratégia que mais lhes agrada, dando preferência à estratégia 1010.

|                            |              |      | 112+37= | 1520+482= | 32+54+13= |
|----------------------------|--------------|------|---------|-----------|-----------|
| Estratégi                  | Decomposição | 1010 | 11      | 7         | 8         |
|                            | 1010         | 10's | 2       | 2         | 4         |
|                            | Algoritmo    |      | -       | 2         | 1         |
| Outra (O)                  |              |      | -       | -         | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 5       | 7         | 4         |

Tabela 51 – Resumo das estratégias nas operações de adição

Para resolver **112+37**, os alunos mostram claramente a sua preferência pela estratégia 1010, tal como a aluna N decidiu resolver a operação, decompondo os fatores e adicionando-os por classes, mostrando uma estratégia solidificada e bem apresentada. Já a aluna M apresenta o que parece ser uma resolução baseada na estratégia 10's, também aliada à decomposição, contudo não tão organizada como a aluna N.

|                  |                               |
|------------------|-------------------------------|
| $112 + 37 = 149$ | $100 + 10 + 2 + 30 + 7 = 149$ |
|------------------|-------------------------------|

Figura 109 - Estratégia 10's (aluna M)

|                  |  |
|------------------|--|
| $112 + 37 = 149$ | $112 + 37 = (100 + 10 + 2) + (30 + 7)$<br><del><math>100 + 10 + 2</math></del><br>$100 + 40 + 9 = 149$ |
|------------------|--|

Figura 110 - Estratégia 1010 (aluna N)

Para calcular  $1520 + 482$ , as alunas E (1010) e F (10's) apresentam resoluções semelhantes às das colegas apresentadas anteriormente. Ambas decompõem os fatores, porém uma delas (aluna E) apresenta um cálculo mais estruturado, indicando as somas por classes e, a outra (aluna F) apresenta a decomposição dos fatores sugerindo uma adição sequencial. Ambas apresentam procedimentos corretos embora com visões distintas da sua conclusão.

|                |   |
|----------------|---|
| $1520 + 482 =$ | $(1000 + 500 + 20) + (400 + 80 + 2) =$<br>$2002$<br>$1000 + 900 + 100 + 2 = 2002$ |
|----------------|---|

Figura 111 - Estratégia 1010 (aluna E)

|                |  |
|----------------|--|
| $1520 + 482 =$ | $2002$<br>$1000 + 500 + 20 + 400 + 8 + 2 = 2002$ |
|----------------|--|

Figura 112 - Estratégia 10's (aluna F)

Na última adição ( $32 + 54 + 13$ ) acontece o mesmo que se passou nas adições anteriores nesta sessão, uma aluna (D) explicita toda a estratégia, enquanto a outra aluna (F) apresenta uma decomposição que sugere uma adição sequencial dos fatores.

|                  |  |
|------------------|--|
| $32 + 54 + 13 =$ | $30 + 2 + 50 + 4 + 10 + 3 = 99$<br><del><math>30 + 2</math></del><br><del><math>50 + 4</math></del><br><del><math>10 + 3</math></del><br>$90 + 9 = 99$ |
|------------------|--|

Figura 113 - Estratégia 1010 (aluna D)

|                  |   |
|------------------|---|
| $32 + 54 + 13 =$ | $99$<br>$30 + 2 + 50 + 4 + 10 + 3 = 99$ |
|------------------|---|

Figura 114 - Estratégia 10's (aluna F)

## ✓ SUBTRAÇÃO

Na **subtração** as dificuldades continuam a ser evidentes, havendo certas estratégias que raramente são usadas. É importante referir que nesta sessão foi usada pela primeira vez a estratégia N10C.

|                            |                      |      | 77-26= | 342-95= | 5326-999= |
|----------------------------|----------------------|------|--------|---------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | -      | -       | -         |
|                            |                      | N10C | -      | -       | 1         |
|                            |                      | A10  | 7      | 1       | -         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 4      | 1       | -         |
|                            | Algoritmo            |      | 3      | -       | -         |
| Outra (O)                  |                      |      | -      | -       | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 4      | 16      | 16        |

Tabela 52 – Resumo das estratégias nas operações de subtração

Para resolver **77-26**, a aluna C optou pela estratégia A10 apoiando-se na linha numérica para contabilizar os “saltos” que necessitava de dar para obter uma resposta correta. Por outro lado, a aluna J apresenta uma resolução extremamente organizada da estratégia 1010, explicitando as operações intermedias que necessitou de realizar para obter o resultado correto.

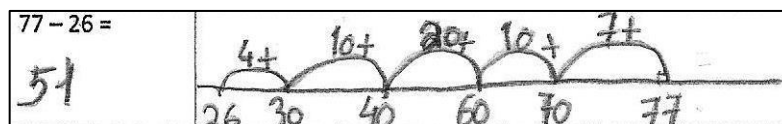


Figura 115 - Estratégia A10 (aluna C)

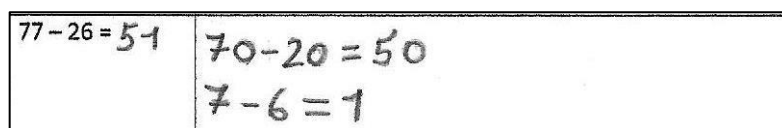


Figura 116 - Estratégia 1010 (aluna J)

Para calcular **342-95**, o aluno O recorre à ajuda da linha numérica, implementando a estratégia de saltos A10. O aluno inicia o seu percurso de saltos no subtrativo (95) até atingir o aditivo (342), os “saltos” são dados em quantidades diferentes adaptando-se aos números envolvidos facilitando assim a estruturação do seu raciocínio.

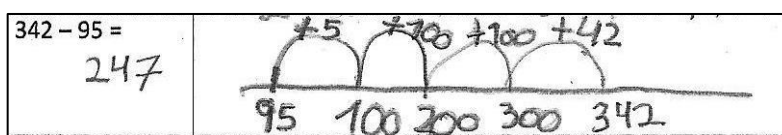


Figura 117 - Estratégia A10 (aluno O)

Na última subtração (**5326-999**) foi usada pela primeira vez o que parece ser a estratégia N10C, o aluno H adicionou logo no início, tanto ao aditivo como ao subtrativo, uma unidade facilitando assim a sua resolução, apresentando números mais favoráveis para a realização da operação.

|              |  |
|--------------|--|
| 5326 - 999 = | $  \begin{array}{r}  5326 - 999 = \\  \downarrow +1 \quad \downarrow +1 \\  5327 - 1000 = 4327  \end{array}  $ |
|--------------|--|

Figura 118 - Estratégia N10C (aluno H)

## ✓ MULTIPLICAÇÃO

Nas **multiplicações** a prestação dos alunos melhorou significativamente na utilização de procedimentos aditivos, mais concretamente no que se refere a adicionar sucessivamente. Contudo, a utilização desse tipo de estratégia aumentou mas, o número de alunos que não responde ou que erra mantém-se alto.

|                            |                               |   | 150x3= | 75x6= | 12x5= | 24x5= |
|----------------------------|-------------------------------|---|--------|-------|-------|-------|
| Estratégias                | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 5      | 3     | 6     | 4     |
|                            |                               | Adicionar dois a dois                               | -      | -     | -     | -     |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | -      | -     | -     | -     |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | -      | -     | -     | -     |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 1      | -     | 2     | 2     |
|                            | Algoritmo                     |   | -      | -     | -     | -     |
|                            | Indicação do resultado        |   | 3      | 1     | 2     | 2     |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               | 9   | 14     | 8     | 10    |       |

Tabela 53 – Resumo das estratégias nas operações de multiplicação

Na resolução de **150x3**, a utilização dos dois tipos de procedimentos mantém-se, havendo resoluções que advêm de procedimentos aditivos e outra de procedimentos

multiplicativos. Neste caso, o aluno H mostrou preferência na utilização de um procedimento aditivo, assumindo que  $150 \times 3$  é o mesmo que ter  $3 \times 150$  o aluno adicionou três vezes o 150 para apresentar a estratégia que considerou a melhor. Por outro lado, na resolução da mesma operação, o aluno O preferiu a utilização de um procedimento multiplicativo através da decomposição decimal de um dos fatores, o aluno decompôs o 150 em  $100+50$  e multiplicou cada fator por 3, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

|                  |                         |
|------------------|-------------------------|
| $150 \times 3 =$ | $150 + 150 + 150 = 450$ |
|------------------|-------------------------|

Figura 119 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluno H)

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $150 \times 3 =$<br>450 | $15 \times 3 = 100 \times 3 + 50 \times 3 = 450$ |
|-------------------------|--|

Figura 120 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O)

Na resolução da operação  $75 \times 6$ , a aluna E procedeu da mesma forma que o aluno H na operação apresentada anteriormente, assumiu que  $75 \times 6$  é o mesmo que  $6 \times 75$  e adicionou seis vezes o 75, obtendo o resultado correto.

|                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| $75 \times 6 =$<br>450 | $75 + 75 + 75 + 75 + 75 + 75 = 450$ |
|------------------------|-------------------------------------|

Figura 121 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

Para calcular  $12 \times 5$  os alunos procederam ao mesmo tipo de resolução apresentada na primeira multiplicação. A aluna A optou pela decomposição decimal de um dos fatores, decompondo o 12 em  $10+2$ ; a aluna E optou pela utilização de um procedimento aditivo, adicionando o 12 cinco vezes.

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $12 \times 5 =$<br>60 | $12 \times 5 = (5 \times 10) + (5 \times 2) = 60$<br>$10 + 2$ |
|-----------------------|---|

Figura 122 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluna A)

|                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| $12 \times 5 =$<br>60 | $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$ |
|-----------------------|-------------------------------|

Figura 123 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna E)

Para resolver a última multiplicação apresentada (**24x5**), o tipo de resolução manteve-se consistente com as multiplicações anteriores. A aluna F assume que  $24 \times 5$  é o mesmo que  $5 \times 24$  e adiciona cinco vezes o 24; e, o aluno O utiliza a decomposição decimal de um dos fatores, decompondo o 24 em 20+4 e multiplicando cada fator por 5, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

|                     |                                |
|---------------------|--------------------------------|
| $24 \times 5 = 120$ | $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$ |
|---------------------|--------------------------------|

Figura 124 - Procedimento aditivo - adicionar sucessivamente (aluna F)

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $24 \times 5 =$<br>$120$ | $24 \times 5 = 20 \times 5 + 4 \times 5 = 120$ |
|--------------------------|--|

Figura 125 - Procedimento multiplicativo – decomposição decimal de um dos fatores (aluno O)

### Síntese da sessão:

No que diz respeito à **adição**, os alunos mantiveram-se coerentes com os resultados comparativamente à última sessão. A preferência pela estratégia 1010 mantém-se e o número de alunos que não responde ou que erra é baixo, comparativamente com as outras operações apresentadas na tira.

| ADIÇÃO                     |              |      | Nº alunos |
|----------------------------|--------------|------|-----------|
| Estratégias                | Decomposição | 1010 | 26        |
|                            | 1010         | 10's | 8         |
|                            | Algoritmo    |      | 3         |
| Outra (O)                  |              |      | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |              |      | 16        |

Tabela 54 – Síntese de estratégias nas operações de adição

Nas questões referentes à **subtração**, os alunos dividem-se entre a utilização da estratégia A10 (bastante usada nas últimas sessões), sendo cada vez mais interiorizada pelos alunos como facilitadora no desenvolvimento do raciocínio; e a decomposição através da estratégia 1010. As dificuldades mantêm-se existindo um grande número de alunos com respostas erradas ou com ausência da mesma.



| SUBTRAÇÃO                  |                      |      | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------|------|-----------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 0         |
|                            |                      | N10C | 1         |
|                            |                      | A10  | 8         |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | 5         |
|                            | Algoritmo            |      | 3         |
| Outra (O)                  |                      |      | 1         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 36        |

Tabela 55 – Síntese de estratégias nas operações de subtração

No que concerne às questões relacionadas com a **multiplicação**, houve um aumento significativo na utilização de procedimentos aditivos, mais concretamente no que se refere a adicionar sucessivamente os fatores. Ainda assim, os alunos continuam a apresentar grandes dificuldades nas estratégias para este tipo de operação, dificultando assim o desenvolvimento do seu raciocínio matemático em relação à multiplicação.

| MULTIPLICAÇÃO              |                                  |   | Nº alunos |
|----------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| Estratégias                | Procedimentos<br>aditivos        | Adicionar sucessivamente                            | 18        |
|                            |                                  | Adicionar dois a dois                               | 0         |
|                            | Procedimentos<br>multiplicativos | Usar múltiplos de 5 e de 10                         | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores | 0         |
|                            |                                  | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores     | 5         |
|                            | Algoritmo                        |   | 0         |
| Indicação do resultado     |                                  |   | 8         |
| Não respondeu (NR) / Errou |                                  |   | 41        |

Tabela 56 – Síntese de estratégias nas operações de multiplicação

#### 4.2. A exploração das cadeias

De modo a dar continuidade ao desenvolvimento do cálculo mental neste grupo de alunos, foram exploradas cinco cadeias numéricas, uma no início de cada sessão. Esta exploração foi complementada, como já havia sido feito com as tiras de cálculo mental, com o jogo do “Número do dia”, existindo sempre dois momentos iniciais de ‘estímulo’ matemático.

A exploração das cadeias foi realizada no início de cada aula, após a rotina implementada ser cumprida, fazendo parte desta rotina o jogo acima referido. Para que a

tarefa fosse bem-sucedida, sem distrações que pudessem atrapalhar a concentração dos alunos foi-lhe pedido que arrumassem tudo nas suas secretárias, por forma a estarem única e exclusivamente atentos ao que se passava no quadro.

A tabela seguinte mostra as cadeias que foram apresentadas aos alunos.

| <b>1ªcadeia</b> | <b>2ªcadeia</b>       | <b>3ªcadeia</b>      | <b>4ªcadeia</b> | <b>5ªcadeia</b>   |
|-----------------|-----------------------|----------------------|-----------------|-------------------|
| 3 de dezembro   | 4 de dezembro         | 5 de dezembro        | 7 de janeiro    | 8 de janeiro      |
| $5 + 5 = 10$    | $25 \times 2 = 50$    | $2 \times 24 = 48$   | $50 - 25 = 25$  | $250 + 250 = 500$ |
| $5 + 4 = 9$     | $25 \times 4 = 100$   | $4 \times 24 = 96$   | $50 - 26 = 24$  | $250 + 251 = 501$ |
| $5 + 6 = 11$    | $25 \times 20 = 500$  | $2 \times 48 = 96$   | $50 - 24 = 26$  | $250 + 249 = 499$ |
| $6 + 6 = 12$    | $25 \times 40 = 1000$ | $20 \times 48 = 960$ | $52 - 25 = 27$  | $249 + 249 = 498$ |

Tabela 57 – Cadeias numéricas apresentadas aos alunos

As cadeias foram sendo apresentadas gradualmente, dando algum tempo aos alunos para pensarem na resposta e na sua justificação. Quando observava que uma grande parte dos alunos já tinha o braço no ar, questionava a turma se podia avançar, possibilitando que explicassem a sua estratégia. Os gráficos que são apresentados na análise de cada cadeia registam a participação do número de alunos em cada uma delas, ou seja, os alunos levantavam o braço e posteriormente eram escolhidos alguns para explicitar a sua forma de resolução. Após serem ouvidas algumas justificações, a turma era questionada se tinham mais alguma forma de resolução por forma a serem partilhadas todas as estratégias.

### **1.ª CADEIA**

Na exploração da **1.ª cadeia**, os alunos mostraram-se logo muito empenhados e participativos. Visto ser a primeira cadeia apresentada o seu grau de dificuldade foi baixo, sendo esta usada para explanar aos alunos o que se pretendia nos dias seguintes. No entanto, embora envolvendo cálculos fáceis, esta cadeia tinha como foco o uso de estratégias anteriormente não usadas pelos alunos – dobros e quase dobros.

A participação nesta cadeia foi bastante ativa, havendo sempre mais de metade da turma a participar. O gráfico que se segue regista a participação dos alunos nesta cadeia, estes iam levantando o braço à medida que sabiam a resposta correta.

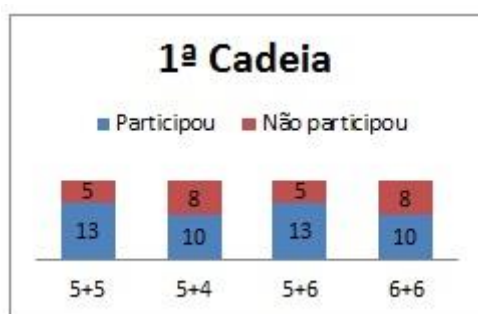


Gráfico 1 - Participação dos alunos na 1ª Cadeia

Os alunos relacionaram as operações entre si, tornando o seu raciocínio mais rápido e eficaz. As explicações dos alunos durante a sessão estão sintetizadas na tabela seguinte:

| 1ª Cadeia | Justificações apresentadas pelos alunos                               |
|-----------|---|
| 5+5       | "Esta é fácil, é só juntar os dedos das duas mãos"<br>"Fiz de cabeça" |
| 5+4       | "É só tirar um à outra"   |
| 5+6       | "Juntas 1 à primeira"<br>"É 10 mais 1"                                |
| 6+6       | "Juntas 1 à anterior"<br>"É uma dúzia"                                |

Tabela 58 – Justificações apresentadas pelos alunos na 1ª Cadeia

## 2.ª CADEIA

Na exploração da **2.ª Cadeia** os alunos tiveram algumas dificuldades, havendo um baixo número de participações, comparativamente à cadeia anterior. O gráfico abaixo sintetiza a participação dos alunos.

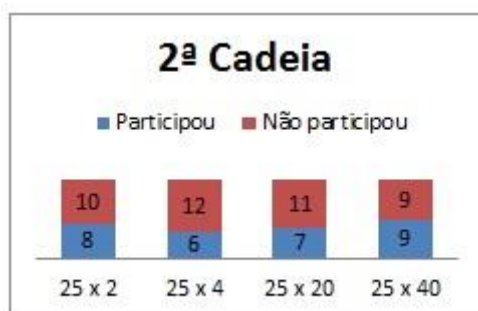


Gráfico 2- Participação dos alunos na 2ª Cadeia

Tratando-se de uma cadeia referente à multiplicação, os alunos usaram a relação dos dobros e da decomposição de fatores, facilitando assim o seu raciocínio. A tabela abaixo resume as justificações dadas pelos alunos na exploração desta cadeia.

| 2ª Cadeia    | Justificações apresentadas pelos alunos  |
|--------------|--|
| <b>25x2</b>  | “É o dobro de 25”<br>“São 20+20+5+5”   |
| <b>25x4</b>  | “É o dobro da primeira”<br>“É 25+25+25+25”<br>“Então 20x4 é 80 e 5x4 é 20, 80+20 dá 100” |
| <b>25x20</b> | “Acrescentas um zero na primeira”  |
| <b>25x40</b> | “Acrescentas um zero na segunda”   |

Tabela 59 – Justificações apresentadas pelos alunos na 2ª Cadeia

Na operação **25x2**, alguns alunos utilizaram o conhecimento do dobro de 25, interpretando 25x2 como 2x25 e outros recorreram à decomposição numérica, decompondo o 25 em 20+5, adicionando duas vezes cada parcela.

Na operação seguinte, **25x4**, os alunos apresentaram três justificações para a sua resolução: o dobro do resultado anterior (estabelecendo assim a relação entre expressões numéricas); transformando a multiplicação numa adição; e, por fim, decompondo e multiplicando ambos os fatores por 4, somando-os no final.

Nas restantes operações, **25x20** e **25x40**, os alunos estabeleceram uma relação direta com as duas primeiras expressões apresentadas, evidenciando que sabem que na multiplicação por 20 bastaria acrescentar um zero às anteriores para obter o resultado correto.

### **3.ª CADEIA**

Na exploração da **3.ª Cadeia**, também referente à multiplicação, os alunos apresentaram uma baixa participação, semelhante à cadeia anterior. O gráfico que se segue regista a participação dos alunos nesta exploração.

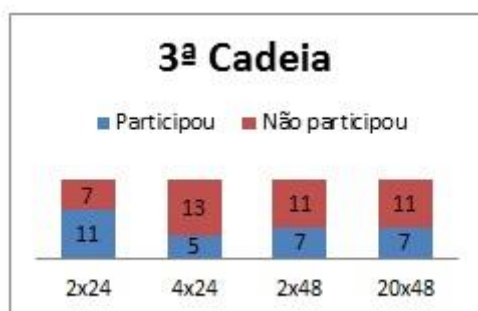


Gráfico 3 - Participação dos alunos na 3ª Cadeia

Nesta 3.ª Cadeia, referente à multiplicação, tal como a anterior, os alunos apresentaram algumas dificuldades em exprimir as suas estratégias, não existindo muita

segurança durante a argumentação das mesmas. A tabela apresentada de seguida sintetiza os argumentos utilizados nesta sessão.

| 3ª Cadeia    | Justificações apresentadas pelos alunos         |
|--------------|---|
| <b>2x24</b>  | “São 12+12+12+12”<br>“São 20+20+4+4”            |
| <b>4x24</b>  | “É duas vezes a anterior”<br>“É 48x2”           |
| <b>2x48</b>  | “Dá o mesmo que a anterior”<br>“É (2x40)+(2x8)” |
| <b>20x48</b> | “Acrescentas um zero na anterior”               |

Tabela 60 – Justificações apresentadas pelos alunos na 3ª Cadeia

Na primeira linha desta cadeia numérica, os alunos optaram pela decomposição aditiva do fator 24 que é transformado em 12+12. Numa das opções, os alunos decompuseram o 24 em 20+4 e, adicionaram duas vezes cada fator, ou seja, transformando a multiplicação numa adição.

Na segunda linha da cadeia, 4x24, os alunos usaram a relação de dobros. Na terceira linha apresentada os alunos constataram que o resultado seria o mesmo que a operação anterior, visto que 4x24 e 2x48 dão o mesmo resultado.

Na última linha apresentada os alunos estabeleceram relação com a anterior referindo que necessitava apenas de acrescentar um zero ao produto de 2x48 para obter 20x48.

#### **4.ª CADEIA**

A exploração da **4.ª Cadeia**, referente à subtração, teve uma maior participação dos alunos que a anterior que tiveram, no entanto, algumas dificuldades nas duas últimas linhas da cadeia. No gráfico seguinte registo a participação dos alunos nesta cadeia.

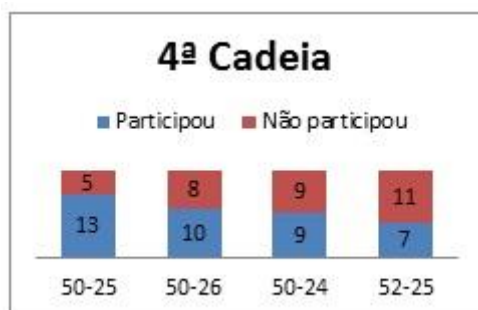


Gráfico 4 - Participação dos alunos na 4ª Cadeia

Durante esta sessão os alunos mostraram alguma dificuldade na explicação da estratégia que utilizaram, mostrando-se pouco à vontade. A tabela abaixo sintetiza as justificações apresentadas pelos alunos nesta sessão.

| <b>4ª Cadeia</b> | <b>Justificações apresentadas pelos alunos</b>                            |
|------------------|---|
| <b>50-25</b>     | “Tiras metade”<br>“Fazes 50-20 dá 30 e depois 30-5 dá os 25”              |
| <b>50-26</b>     | “Tiras mais uma na anterior”  |
| <b>50-24</b>     | “Juntas duas na anterior”<br>“Juntas uma na primeira”                     |
| <b>52-25</b>     | “Fazes 50-20 e 2-5 e depois fazes 30-3”<br>“Fazes 50-25 e depois somas 2” |

Tabela 61 – Justificações apresentadas pelos alunos na 4ª Cadeia

A primeira linha desta cadeia, que teve uma maior participação dos alunos, a maior parte dos alunos associaram à metade, outros alunos resolveram a expressão numérica através da decomposição. Assumindo que 25 é igual a  $20+5$ , os alunos realizaram a operação por partes, primeiro retiraram 20 ao 50, ficando com 30 e, por fim retiraram 5 ao 30 ficando com 25.

Na segunda linha da cadeia os alunos, indicaram que apenas seria necessário retirar uma unidade à operação anterior. Na terceira linha, os alunos também estabeleceram relação, tal como fizeram na anterior, desta vez relacionando com a primeira e com a segunda linha. Referiram que comparativamente com a segunda teriam apenas que adicionar duas unidades e que, comparativamente com a primeira teriam apenas de adicionar uma unidade.

Na última linha, com um pouco menos de participação, os alunos recorreram à decomposição. Numa primeira instância decompondo ambos os fatores, e numa outra perspetiva, através da compensação.

### **5.ª CADEIA**

Na 5.ª e última cadeia apresentada à turma a participação foi mais equilibrada, tendo os alunos estabelecido mais relações nas estratégias utilizadas para a resolução das operações apresentadas. O gráfico abaixo mostra a participação nesta última cadeia.

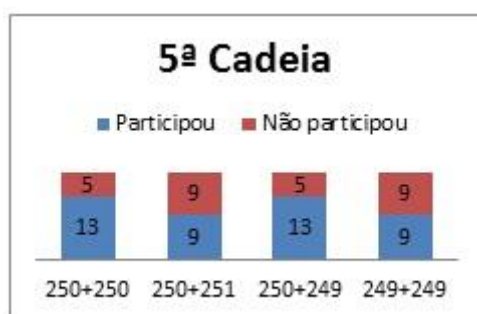


Gráfico 5- Participação dos alunos na 5ª Cadeia

Nesta cadeia foram estabelecidas relações entre todas as linhas apresentadas, existindo uma maior atenção dos alunos aos pormenores e diferenças entre as linhas. A tabela abaixo mostra as justificações apresentadas pelos alunos durante esta sessão, evidenciando que as relações foram sempre estabelecidas.

| 5ª Cadeia      | Justificações apresentadas pelos alunos                       |
|----------------|---|
| <b>250+250</b> | “É 25+25 e acrescentas um zero no fim”<br>“São 200+200+50+50” |
| <b>250+251</b> | “Somas um na anterior”  |
| <b>250+249</b> | “Tiras dois da anterior”<br>“Tiras um da primeira”            |
| <b>249+249</b> | “Tiras um da anterior”<br>“Fazes 500-2”                       |

Tabela 62 – Justificações apresentadas pelos alunos na 5ª Cadeia

Na primeira linha os alunos estabeleceram logo a relação com uma operação que lhes é familiar, comparando o 250+250 ao 25+25, referindo que existia apenas a necessidade de se acrescentar um zero no final para obtermos o resultado correto. Contudo, outros alunos optaram pela decomposição, decompondo 250 em 200+50 e somando duas vezes cada um deles, obtendo da mesma forma um resultado correto.

Na segunda linha os alunos referiram prontamente que seria apenas necessário adicionar uma unidade ao resultado anterior. O mesmo se passou na terceira linha, relacionando com a primeira, sendo que deveriam apenas retirar uma unidade e, relacionaram com a segunda linha, sendo necessário retirar duas unidades ao resultado.

Na última linha apresentada, os alunos referiram duas opções de resolução, uma delas seria apenas preciso retirar uma unidade ao resultado anterior e numa outra perspectiva referiram que se fizessem 500-2 obteriam o resultado pretendido.

## **SÍNTESE**

As cadeias numéricas pretendem, tal como as tiras de cálculo mental e o jogo do “Número do dia”, o desenvolvimento do cálculo podendo ele ser mental ou escrito e, desenvolver a comunicação matemática através da explicação dos alunos na turma das estratégias que os ajudam a resolver os problemas apresentados com sucesso. Desta forma, a participação dos alunos nestas cadeias foi de extrema importância, tanto no desenvolvimento do seu raciocínio matemático como na comunicação.

Ao longo das cadeias, os alunos foram tendo diferentes abordagens às diferentes operações que foram surgindo, apresentando algumas dificuldades nas cadeias referentes à multiplicação. Essas dificuldades foram demonstradas através da fraca participação, comparando com outras operações, e pela dificuldade em expressar as suas estratégias. Nas cadeias referentes à adição e subtração os alunos eram mais espontâneos nas suas respostas, tendo as estratégias mais organizadas e mais explícitas.

As linhas apresentadas em cada cadeia estão intrinsecamente relacionadas entre si e, como tal, pretendia-se que os alunos conseguissem estabelecer essa mesma relação facilitando assim o raciocínio. Na maior parte das vezes essa relação foi estabelecida, ajudando os alunos a criar estratégias facilitadoras do conhecimento dos números e da relação entre eles.



## **Capítulo 5 – Conclusões e considerações finais**

O cálculo mental, a que no dia-a-dia cada indivíduo é solicitado a recorrer, é desenvolvido sobretudo na escola e, é fundamental que este seja trabalhado desde a entrada para o 1.º ciclo, permitindo aos alunos o contacto com um vasto leque de experiências que lhes permitam transpor o conhecimento adquirido para a vida extraescolar.

Buys (2001) refere que no cálculo mental se opera sobre os números e não sobre os dígitos; deve usar-se as propriedades das operações, bem como estabelecer relações numéricas entre os números, permitindo que se desenvolvam estratégias que facilitem o cálculo. Este deve ser um cálculo pensado e não mecânico, calculando mentalmente, podendo ter o auxílio, ou não, de registos escritos. As estratégias de cálculo mental podem ser sugeridas aos alunos, contudo é importante que o aluno desenvolva a sua proficiência de cálculo levando-o a descobrir novas estratégias facilitadoras do raciocínio.

O presente estudo teve como objetivo o desenvolvimento do cálculo mental. O estudo baseia-se na análise da evolução das estratégias usadas pelos alunos durante as sessões em que exploravam tiras de cálculo mental e cadeias numéricas, por mim apresentadas.

Para a concretização do estudo foram colocadas duas questões problema:

- Quais as estratégias de cálculo mental que os alunos usam?
- Como evoluem as escolhas das estratégias de cálculo mental?

A análise de dados realizada e apresentada no capítulo anterior permite responder às questões, como a seguir apresento.

### **Quais as estratégias de cálculo mental que os alunos usam?**

Nas tabelas seguintes estão sintetizadas as estratégias usadas pelos alunos ao longo das sessões com as tiras de cálculo mental.

| ADIÇÃO                     |                      |      | 12/11 | 13/11 | 19/11 | 20/11 | 21/11 | 26/11 | 27/11 | 28/11 |
|----------------------------|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Estratégias                | Decomposição<br>1010 | 1010 | 7     | 8     | 17    | 25    | 15    | 35    | 29    | 26    |
|                            |                      | 10's | 24    | 1     | 4     | 2     | 6     | 6     | 8     | 8     |
|                            | Saltos<br>N10        | N10  | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |
|                            |                      | N10C | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |
|                            |                      | A10  | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |
|                            | Algoritmo            |      | 5     | 2     | 1     | 4     | 3     | 5     | 1     | 3     |
| Outra (O)                  |                      |      | 2     | 2     | -     | 2     | 2     | -     | 3     | 1     |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 16    | 41    | 29    | 20    | 22    | 11    | 16    | 16    |

Tabela 63 – Síntese global das estratégias nas operações de adição

| SUBTRAÇÃO                  |                      |      | 12/11 | 13/11 | 19/11 | 20/11 | 21/11 | 26/11 | 27/11 | 28/11 |
|----------------------------|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Estratégias                | Saltos<br>N10        | N10  | 7     | 3     | 2     | 5     | 2     | 2     | -     | -     |
|                            |                      | N10C | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | 1     |
|                            |                      | A10  | -     | -     | 6     | 2     | 2     | 10    | 11    | 8     |
|                            | Decomposição<br>1010 | 1010 | -     | 5     | 2     | 1     | 1     | 6     | 4     | 5     |
|                            |                      | 10's | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |
|                            | Algoritmo            |      | 3     | 3     | 3     | 2     | 4     | 4     | -     | 3     |
| Outra (O)                  |                      |      | 3     | 6     | 10    | 7     | 3     | 3     | 3     | 1     |
| Não respondeu (NR) / Errou |                      |      | 41    | 37    | 28    | 37    | 36    | 32    | 39    | 36    |

Tabela 64 – Síntese global das estratégias nas operações de subtração

| MULTIPLICAÇÃO              |                               |   | 12/11 | 13/11 | 19/11 | 20/11 | 21/11 | 26/11 | 27/11 | 28/11 |   |
|----------------------------|-------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| Estratégias                | Procedimentos de contagem     | Contar por saltos   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |   |
|                            | Procedimentos aditivos        | Adicionar sucessivamente  | 11    | 5     | 8     | 9     | 11    | 7     | 9     | 18    |   |
|                            |                               | Adicionar dois a dois   | 1     | -     | -     | -     | -     | -     | 1     | -     |   |
|                            |                               | Adicionar em coluna   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |   |
|                            | Procedimentos subtrativos     | Subtrair sucessivamente   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |   |
|                            | Procedimentos multiplicativos | Usar produtos conhecidos  | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            |                               | Usar relações de dobros   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            |                               | Usar múltiplos de 5 e de 10                                     | -     | -     | -     | -     | -     | 1     | 1     | -     | - |
|                            |                               | Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores             | -     | 4     | -     | -     | -     | -     | 1     | -     | - |
|                            |                               | Usar uma decomposição decimal de um dos fatores                 | -     | -     | 2     | 1     | 3     | -     | 4     | 5     | - |
|                            |                               | Ajustar e compensar   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            |                               | Usar relações de dobro e de metade                              | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            |                               | Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            |                               | Multiplicar em coluna   | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | - |
|                            | Algoritmo                     |   | 6     | 2     | 4     | 8     | 3     | 6     | 3     | -     | - |
| Indicação do resultado     |                               | 12  | 11    | 9     | 22    | 14    | 15    | 15    | 8     | -     |   |
| Não respondeu (NR) / Errou |                               | 42  | 50    | 45    | 31    | 33    | 47    | 42    | 41    | -     |   |

Tabela 65 – Síntese global das estratégias nas operações de multiplicação

Nas questões referentes à **adição** os alunos apresentam resultados positivos, existindo números baixos no que diz respeito às questões que erram ou não respondem. Como podemos observar na tabela 63, existe um grande número de alunos que opta pela utilização da decomposição em detrimento das restantes estratégias, nomeadamente da estratégia de saltos que nunca foi usada ao longo das sessões.

Ao longo das semanas podemos observar uma evolução na utilização da estratégia 1010, tendo cada vez mais alunos a utilizá-la. Na 1.ª sessão (12/11) a estratégia 10's foi fortemente utilizada, contudo nas sessões seguintes teve um enorme decréscimo na sua utilização. O algoritmo foi sempre utilizado ao longo das sessões, contudo a sua utilização sempre foi reduzida.

A **subtração** apresenta-se como uma das grandes dificuldades dos alunos. Os alunos erraram bastante neste tipo de operação, mostrando-se pouco à-vontade com as estratégias e até mesmo com a subtração em si, como podemos observar na tabela 64 o elevado número de alunos que não respondeu ou errou e o número de alunos que usou o algoritmo.

No que diz respeito ao uso de estratégias, os alunos dividiram-se entre a estratégia de saltos e a decomposição. No entanto, podemos constatar pela observação da tabela que algumas estratégias nunca foram usadas ou foram usadas muito poucas vezes, como a 10's e a N10C (usada apenas uma vez). A utilização da estratégia A10 começou a ser utilizada a partir da terceira sessão, e, através dos valores apresentados podemos concluir que se tornou uma das favoritas dos alunos.

Na **multiplicação** a maioria dos alunos apresenta o resultado, não mostrando qual a estratégia que usou. Isto pode indicar que as operações apresentaram um grau de dificuldade pouco elevado, até porque realizavam regularmente na sala de aula jogos de tabuada poderão ter influenciado a obtenção deste resultado. Os jogos de tabuada, bastante apreciados pelos alunos, poderão ter permitido que um grande número realizasse as operações “de cabeça” como referiam quando eram abordados sobre o assunto. No entanto, pode-se igualmente conjecturar que os alunos tinham dificuldade em explicitar estratégias com que ainda tinham um contacto muito superficial.

Como podemos ver na tabela 65, os procedimentos de contagem e os procedimentos subtrativos nunca foram usados pelos alunos, podemos ainda constatar que dos diversos tipos de procedimento existentes os alunos usaram apenas dois nas suas resoluções, os aditivos e os multiplicativos. Dos três procedimentos específicos, referentes aos procedimentos aditivos, apenas dois foram usados pelos alunos, contudo o procedimento específico referente a “contar sucessivamente” teve muitos mais adeptos que o “contar dois a dois” (usado apenas duas vezes no total das sessões). Com um vasto leque de procedimentos multiplicativos

específicos, os alunos também se cingiram apenas à utilização de três deles (múltiplos de 5 e de 10, decomposição não decimal e a decomposição decimal), existindo uma maior incidência pela decomposição decimal.

Em suma, posso afirmar que os alunos se mostraram mais à-vontade na utilização de determinado tipo de estratégias, facilitando assim o desenvolvimento do raciocínio matemático. Posso então concluir que, neste estudo: no que diz respeito à **adição**, os alunos usam mais a estratégia de decomposição; na **subtração** preferem usar a estratégia de saltos; e, na **multiplicação** os alunos dividem-se entre procedimentos aditivos (adicionar sucessivamente) e procedimentos multiplicativos (decomposição decimal) e, a grande maioria apresenta apenas o resultado da operação não especificando o tipo de estratégia usada e ao serem interpelados sobre isso os alunos apenas referiam que “fiz de cabeça”.

### Como evoluem as escolhas das estratégias de cálculo mental?

A evolução da escolha das estratégias varia de indivíduo para indivíduo e depende da destreza de cada um, do conhecimento que tem dos números, das relações entre eles, entre outros fatores. *A destreza de cálculo significa possuir métodos eficazes e precisos de calcular. Os alunos mostram ter destreza de cálculo quando demonstram flexibilidade nos métodos de cálculo que escolhem, compreendem e sabem explicar esses métodos e apresentam respostas exatas de forma eficaz.* (NCTM, 2007, p.177)

Este estudo confirma que o algoritmo condiciona a utilização das estratégias das diferentes operações. No caso da **adição**, esta foi fortemente influenciada pelo algoritmo, levando os alunos a utilizar a decomposição em detrimento da estratégia de saltos. Estes alunos dominam bastante a técnica do algoritmo da adição, levando-os a usar a decomposição com maior facilidade. Os alunos procediam à decomposição das parcelas em classes e, posteriormente, adicionavam as classes comuns e, no final, juntavam tudo, facilitando assim o seu raciocínio matemático, tornando-o rápido e eficaz. Por estarem muito familiarizados com o algoritmo e as suas técnicas, os alunos limitaram-se à utilização das estratégias referentes à decomposição (1010), não saindo da sua zona de conforto para explorarem outras estratégias de cálculo, nomeadamente as estratégias de saltos (N10). Deste modo, posso afirmar que os alunos não diversificam muito na utilização de estratégias nas adições, limitando-se ao uso do que lhes era familiar e confortável.

Nas **subtrações** a influência do algoritmo também foi evidente, pois os alunos usaram a decomposição decimal, aspeto em que este se baseia. No entanto, domínio do algoritmo da subtração parece ser bastante menor, levando os alunos a procurar estratégias que

considerem mais eficazes para a operação apresentada. Contrariamente ao que aconteceu na adição, neste caso os alunos usaram muito mais a estratégia de saltos (N10), utilizando todos os tipos referentes a essa estratégia (N10, N10C e A10). É importante referir que, neste caso, os alunos pensaram nos números e não no mecanismo de resolução, pensando na melhor forma de resolver a operação, não a tornando mecânica mas sim pensada.

Nas **multiplicações** a utilização de estratégias e a sua evolução foi bastante limitada, pois os alunos usaram poucas estratégias e, as que usaram não evoluíram muito. A forma como resolveram através dos procedimentos aditivos foi constante, não havendo uma evolução na forma como apresentavam ou realizavam as operações, sendo muito consistentes.

Os procedimentos multiplicativos, mais usados pelos alunos, eram apresentados numa vertente muito semelhante à decomposição. Os alunos decompunham os fatores, de forma decimal ou não, e aplicavam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A decomposição decimal, uma decomposição por classes, permitia aos alunos que continuassem na sua zona de conforto não os fazendo mudar de estratégia, sendo esta considerada eficaz na resolução de uma grande parte de operações.

Em qualquer uma das operações existiram estratégias/procedimentos que não foram sequer usados pelos alunos, ou por falta de conhecimento dos mesmos ou por não quererem arriscar estratégias mais ousadas e/ou diferentes daquelas que estavam habituados.

A exploração das cadeias numéricas permitiu aos alunos a utilização de algumas estratégias que não foram usadas nas tiras. Nas adições e subtrações as estratégias usadas nas cadeias foram ao encontro das que tinham sido usadas anteriormente, não havendo uma diferenciação na utilização das que lhes eram familiar e confortáveis de trabalhar. Contudo, foi na multiplicação que os alunos conseguiram aplicar novas estratégias, com alguma facilidade, usando as relações de dobros e de metades. Apesar da multiplicação não ter apresentado tão bons resultados durante as tiras, foi na exploração das cadeias que os alunos, em grande grupo, conseguiram desenvolver e expressar novas estratégias que lhes permitiu aumentar o seu leque de estratégias para utilizar.

Um dos objetivos deste estudo prendia-se com o facto haver necessidade dos alunos desenvolverem a comunicação matemática e a destreza de cálculo, soltando-se do tradicional algoritmo e descobrindo novas formas de cálculo. Através da exploração das cadeias numéricas a comunicação dos alunos melhorou bastante, mostrando-se mais confiantes. Através do desenvolvimento da comunicação os alunos são capazes de explicar os seus cálculos, compreendendo que existem diferentes formas de resolução, tão ou mais eficazes que a sua.

### Limitações:

Uma das grandes limitações prende-se com o facto de os alunos terem um raciocínio matemático pouco desenvolvido, mostravam-se receosos em relação a experiências diferentes do que estavam habituados. A forte dependência pela ajuda da professora titular foi um dos fatores que contribuiu para o fraco desempenho dos alunos no desenvolvimento das estratégias.

O fator tempo também foi uma das limitações, a escola onde se realizou o estágio é muito ativa nas festividades e na partilha entre as salas, tal fator condicionou um pouco a implementação e desenvolvimento do estudo visto que havia constantemente uma atividade proporcionada pelas outras turmas, uma atividade da escola em geral (S. Martinho, Festa de Natal, entre outras). Os três dias que passávamos na escola tinham de ser aproveitados intensamente e muitas vezes era complicado implementarmos o projeto e lecionar a matéria calendarizada pela professora titular. Tínhamos prazos a cumprir no que se referia ao nosso projeto pessoal, bem como à matéria do programa que não podia ficar para trás.

O desenvolvimento do projeto em si foi uma das limitações que mais impacto teve. Eu própria tinha dúvidas sobre como prosseguir a exploração das propostas que fazia aos alunos, hesitando entre indicar um leque grande de estratégias ou limitando o trabalho às que os alunos iam propondo. Estas dúvidas que marcaram a minha ação tiveram um particular relevo pois não foi nomeado um orientador durante o tempo de implementação do projeto, o que fez com que este fosse pensado e efetuado sem a ajuda de um orientador. De qualquer forma, pensando no trabalho realizado, avanço com a hipótese de que o meu objetivo de propor desenvolver o cálculo mental em alunos fortemente habituados a usar só o algoritmo, seria sempre um desafio difícil de efetivamente bem gerir, pois também para mim própria o uso de algumas propriedades e relações não são imediatas e evidentes.

Na generalidade e, contra todas as adversidades, a implementação do projeto correu bem, às vezes não com a devida atenção que lhe deveria ser dada mas os obstáculos foram contornados por forma a proporcionar aos alunos aprendizagens significativas que os fizessem evoluir.

## Referências bibliográficas

- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico*. Porto: ASA.
- Almeida, J. (1990). *A investigação nas ciências sociais*. Lisboa: Presença.
- Altet, M. (1997). *As pedagogias da aprendizagem*. Instituto Piaget: Horizontes Pedagógicos.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.
- Brocardo, J. & Serrazina, L. & Rocha, I. (2008). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.
- Buys, K. (2001). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*, 61-88. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Ferreira, E. (2012). *O Desenvolvimento do Sentido de Número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento apresentada ao Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30). I*, pp. 345-352. Hobart: MERGA.
- Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 89-96). Haifa, Israel.
- Lourenço, G.; Veia, L. (2011). *Calculando em cadeia* (pp. 37-40) In Revista Educação e Matemática (janeiro/fevereiro).



- Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Gonçalves, F. (2010). *Números e operações - 3.º Ano*. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.ºciclo*. Tese de Doutoramento apresentada ao Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* [Acesso eletrónico].
- Morais, C. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.ºano de escolaridade*. Dissertação apresentada de Tese de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.ºciclos do Ensino Básico. Instituto Politécnico de Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Noteboom, A.; Boklove, J. & Nelissen, J. (2001). Glossary part I. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 89-91). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO)
- Oliveira, N. (2013). *Desenvolver o cálculo mental no contexto da resolução de problemas de adição e subtração: um estudo com alunos do 2.ºano de escolaridade*. Dissertação apresentada de Tese de Mestrado em Educação – Didática da Matemática apresentada ao Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Texto Editora (1996). *Dicionário Universal da Língua Portuguesa – Escolar*. Lisboa: Texto editora.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in School*, 28(5), 2-4.
- Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, (pp. 145–156). Buckingham: Open University Press.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47.

- <http://www.priberam.pt/DLPO/algorithmo>, consultado em 07/05/2014, às 18h44
- <http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/algorithmo>, consultado em 07/05/2014, às 18h47